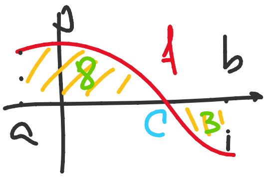
Função dada por um integral (T4) parte 1

Definição: Dizemos que uma função $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável

(segundo Riemann) se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existir

e for um número real.

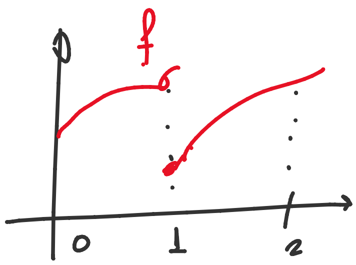
<u>Teorema 1</u>: se f for contínua em $[a,b]$, então f será integrável em $[a,b]$.



$$\int_a^b f(x)\,dx = 5$$

$$A = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{8} + \underbrace{\int_c^b -f(x)\,dx}_{3} = 11$$

<u>Observação</u>: a recíproca do teorema acima não é verdadeira.

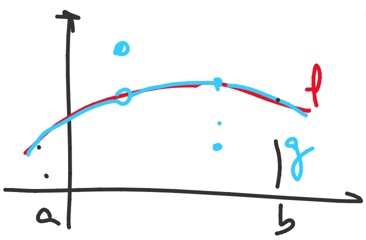


Não é contínua, mas é integrável

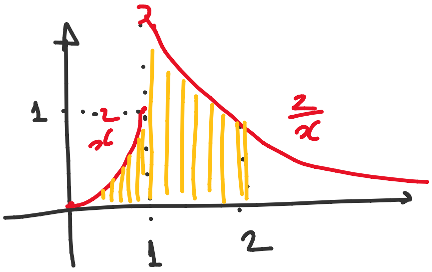
<u>Teorema 2</u>: se f for limitada em $[a,b]$ e descontínua em apenas um número finito de pontos de $[a,b]$, então f será integrável em $[a,b]$.

<u>Teorema 3</u>: Sejam f e g integráveis em $[a,b]$ e tais que $f(x) \neq g(x)$ em apenas um número finito de pontos, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$



Exemplo: Calcule $\int_0^2 f(x)dx$, onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{(*)} + \underbrace{\int_1^2 \frac{2}{x}\,dx}_{(**)} = (***)$$

$(*)$ $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$(**)$ $\int_1^2 \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x|\Big|_1^2 = 2\ln(2) - 2\ln(1) = 2\ln(2)$

$(***) = \frac{1}{3} + 2\ln(2)$.

Função dada por uma integral

Definição: Seja f uma função definida num intervalo I e integrável em todo intevalo $[c, d]$ contido em I. Seja a um número fixo pertencente a I. Para todo x em I, a integral

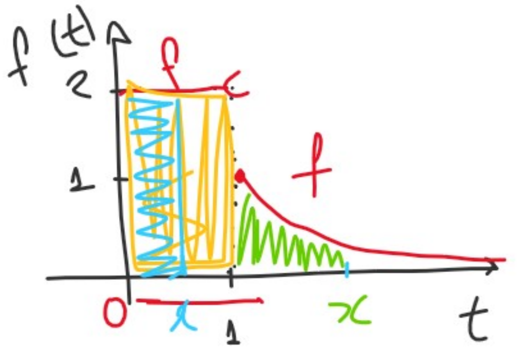
$$\int_a^x f(t)\,dt \text{ existe;}$$

então podemos considerar a função F definida em I e dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \text{onde } f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{1}{t} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x 2\,dt, & 0\leq x<1\\ \int_0^1 2\,dt+\int_1^x \frac{1}{t}\,dt, & x\geq 1\end{cases}$$

$$\int_0^x 2\,dt = 2t\Big|_0^x = 2x-2.0 = 2x$$

$$\int_0^1 2\,dt = 2t\Big|_0^1 = 2-0 = 2$$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|\Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

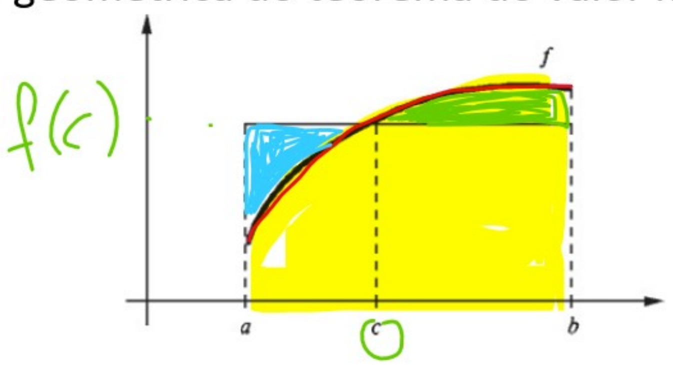
$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x<1\\ 2+\ln x & x\geq 1\end{cases}$$

<u>Teorema do Valor Médio para integral</u>

<u>Teorema</u> (do valor médio para integral): Se f for contínua em $[a,b]$, então existirá pelo menos um c em $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Interpretação geométrica do teorema do valor médio para integrais



Demonstração:

Como f é contínua em $[a,b]$, então pelo T.W., $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tq.

$$m \leq f(x) \leq M \,,\ \forall x \in [a,b] \qquad \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$g(x) = f(x) - m \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - m)\,dx$$

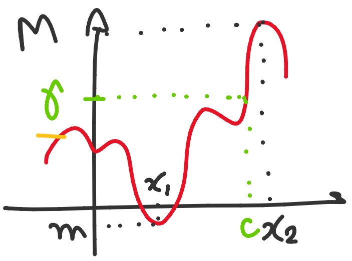
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b m\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx$$

$$\int_a^b m\,dx = mx\Big|_a^b = mb - ma = m(b-a)$$

$$\frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

$$= \gamma$$



(T.V.I) $\Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ tq. $f(c) = \gamma$

Se $\gamma = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$, então $f(c) = \gamma \Rightarrow f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad \text{c.q.d.}$$

Seja f contínua no intevalo I e seja a um ponto em I. Como estamos supondo f contínua em I, para todo x em I, a integral $\int_a^x f(t)dt$ existe. Podemos, então, considerar a função F definida em I e dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Provaremos a seguir que F é uma primitiva de f, ou seja que $F'(x) = f(x)$, para todo x em I.

Obs: $g'(p) = \lim\limits_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(p+h)-g(p)}{h}$ $\quad x - p = h$

<u>Teorema</u> (fundamental do cálculo): Seja f definida e contínua no intevalo I e seja $a \in I$. Nessas condições, a função F dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \,, x \in I$$

é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$, para todo x em I.

<u>Demonstração</u>:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = (*)$$

$(T.V.M.I) \Rightarrow \exists\, c \in \,]x, x+h[$ tq: $\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = f(c).h$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c)\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x).$$

Exercício: Calcule $F'(x)$, sendo F dada por

a) $F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{3t}{1+t^6} dt \Rightarrow F'(x) = \frac{3x}{1+x^6}$

b) $F(x) = \int_{2}^{x} \text{sen}\, t^2\, dt \Rightarrow F'(x) = \text{sen}\, x^2$

c) $F(x) = \int_{x}^{3} \cos t^2\, dt = -\left(\int_{3}^{x} \cos t^2\, dt\right) \Rightarrow F'(x) = -\cos x^2$