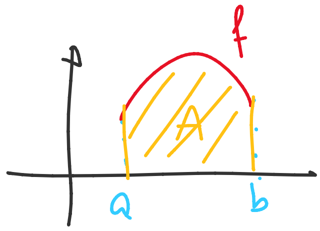
Cálculo de áreas (T4 e T5)

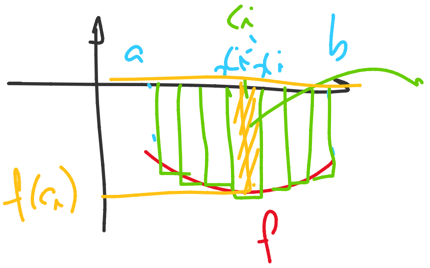
Observação 1: Se $f(x) \geq 0$, então a área da figura entre o gráfico de f, o eixo Ox e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx\,.$$



Observação 2: Se $f(x) \leq 0$, então a área da figura entre o gráfico de f, o eixo Ox e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)dx\,.$$



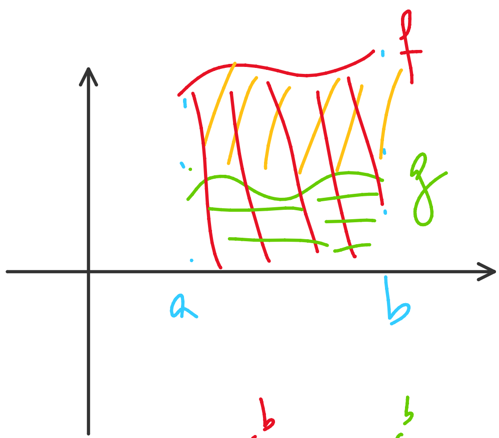
$A_i = -f(c_i)\Delta x_i$

$$A = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum -f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} -\sum f(c_i)\Delta x_i = -\lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum f(c_i)\Delta x_i = -\int_a^b f(x)dx$$

Área entre gráfico de funções

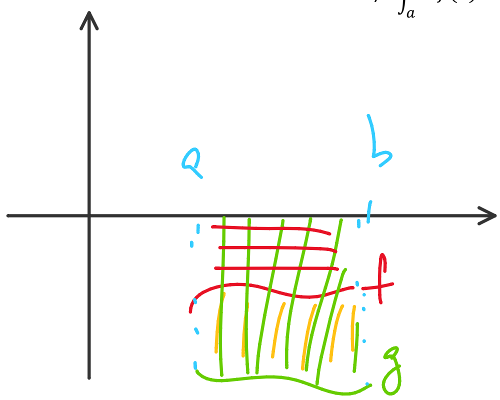
a) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

b) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$



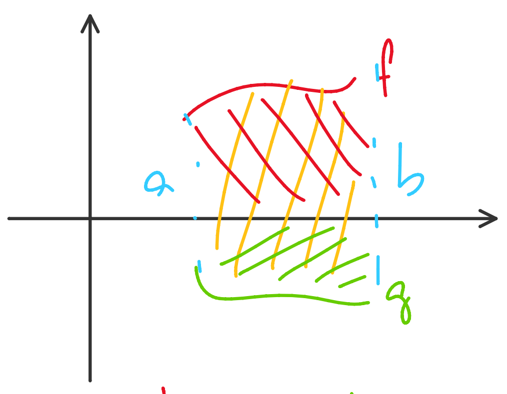
$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

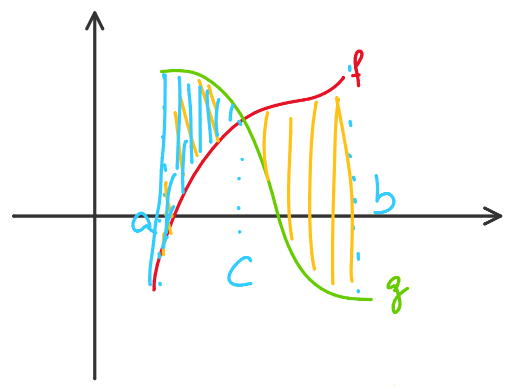
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



$$A = -\int_a^b g(x)dx - \left(-\int_a^b f(x)dx\right)$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



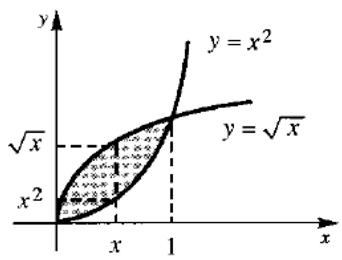


$$A=\int_a^b f(x)\,dx+\left(-\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

$$A=\int_a^c \big(g(x)-f(x)\big)\,dx+\int_c^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$

$$A=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$

<u>Exercício</u>: Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \quad x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2-\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

$$A=\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3}$$

<u>Exercício</u>: Desenhe a região A e calcule a sua área:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 4, y \leq 12 - 3x^2 \text{ e } y \leq 3x^2 + 12x + 12\}$