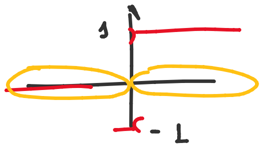
Primitivas (T4)

Pergunta 1: Seja F uma função tal que $F'(x) = 0$ para todo x.
O que pode se afirmar sobre a função F?

Resp: Nada se pode afirmar

Exemplo: Considere $F(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$F'(x) = 0, \ \forall x \in D_F$

Exercício: Dada uma função $f(x) = \cos(x)$, determine uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x), \forall x$

$F(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow F'(x) = \cos x = f(x)$

$F(x) = 1 + \text{sen}\, x \Rightarrow F'(x) = \cos x = f(x)$

$F(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\text{sen}^2 x} = \text{sen}\, x$

$F(x) = \text{sen}\, x + k$

Pergunta 2: Sejam F e G duas funções tais que $F'(x) = G'(x)$ para todo x em I. O que pode se afirmar sobre as funções F e G?

Resp: $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.q. $G(x) = F(x) + k$

Exemplo: Considere $F(x) = \text{sen}^2 x$ e $G(x) = -\cos^2 x$

$F'(x) = 2\,\text{sen}\, x . \cos x$

$G'(x) = -2\cos x(-\text{sen}\, x) = 2\,\text{sen}\, x \cos x$

$F(x) = \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 + G(x)$

Teorema: Seja F contínua no intervalo I. Se $F'(x) = 0$ em todo x no interior de I, então existirá uma constante k tal que $F(x) = k$ para todo x em I.

Demonstração:

Sejam $x_1, x_2 \in \mathring{I}$ = interior de I, $x_1 < x_2$

Então F é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$

$(T.V.M) \Rightarrow \exists\, c \in\,]x_1, x_2[$ tq. $F(x_2) - F(x_1) = \underbrace{F'(c)}_{=0}(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow F(x_1) = F(x_2)$. Seja $k = F(x_2)$

Repetindo o processo para os intervalos de extremidades x e x_2 temos que $F(x) = F(x_2) = k,\ \forall x$

Corolário: Sejam F e G contínuas no intervalo I. Se $F'(x) = G'(x)$ em todo x no interior de I, então existirá uma constante k tal que

$$G(x) = F(x) + k$$

para todo x em I.

Demonstração:

Seja $h(x) = G(x) - F(x) \Rightarrow h'(x) = G'(x) - F'(x) = 0,\ \forall x \in \mathring{I}$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ tq. $h(x) = k,\ \forall x \Rightarrow G(x) = F(x) + k,\ \forall x$ cqd

Exemplo: Seja F definida e derivável em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, $F'(x) = F(x)$. Prove que existe uma constante k tal que para todo x, tem-se $F(x) = ke^x$.

Considere $h(x) = \dfrac{F(x)}{\underbrace{e^x}_{>0}} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{e^x . F'(x) - F(x) . e^x}{e^{2x}} =$

$$= \frac{\cancel{e^x}\left(F'(x) - F(x)\right)}{e^{\cancel{2x}}} = 0,\ \forall x$$

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ tq. $h(x) = k,\ \forall x \Rightarrow F(x) = ke^x,\ \forall x$

Primitivas de funções

Definição: Dada uma função f definida num intervalo I, chamamos de primitiva de f em I a uma função derivável $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $\in x \in I$.

Observação: Acabamos de mostrar que duas primitivas quaisquer de uma função f diferem por uma constante. Portanto, se F e G são duas primitivas de f, então existe uma constante k tal que $G(x) = F(x) + k$

Notação: Denotaremos a família de primitivas de uma função f por

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

que também é chamado de integral indefinida de f.

Primitivas imediatas

Exercício: determine as primitivas de

a) $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F(x) = mx + k$

b) $f(x) = x$ $\Rightarrow F(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + k$

c) $f(x) = x^2$ $\Rightarrow F(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$

d) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow F(x) = \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$

e) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow F(x) = \int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + k, & \alpha = -1 \end{cases}$ $(\alpha = -1) \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow F(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$

g) $f(x) = \mathrm{sen}(x) \Rightarrow F(x) = -\cos x + k$

h) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \mathrm{sen}\, x + k$

i) $f(x) = \mathrm{tg}(x) \Rightarrow F(x) =$? não é imediata $\to -\ln|\cos x| + k$

j) $f(x) = \sec^2(x) \Rightarrow F(x) = \mathrm{tg}\, x + k$

k) $f(x) = \sec(x)\mathrm{tg}(x) \Rightarrow F(x) = \sec(x) + k$

l) $f(x) = \mathrm{cossec}^2(x) \Rightarrow F(x) = -\mathrm{cotg}\, x + k$

m) $f(x) = \mathrm{cossec}(x)\mathrm{cotg}(x) \Rightarrow F(x) = -\mathrm{cossec}\, x + k$

n) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x) = \arcsin x + k$

o) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = \mathrm{arctg}\, x + k$

p) $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + k$

q) $f(x) = a^x \Rightarrow F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$

$\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{a^x \cdot \cancel{\ln a}}{\cancel{\ln a}} = a^x$

r) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow F(x) =$? não é imediata

$\to x \ln x - x + k$