Assíntotas e esboço de gráficos (T4 e T5)

Exercício: Esboce o gráfico de

L4)13)a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

i) $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

ii) Crescimento e decrescimento

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3) = 0$$

$2x^2 \geq 0$

	$-\frac{3}{2}$	
↘		↗	f
−		+	f'

$-\frac{3}{2}$ é ponto de mínimo global de f

iii) Concavidade

$$f''(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x+1) = 0$$

	-1		0		
∪		∩		∪	f
−		−		+	x
−		+		+	x+1
+		−		+	f''

⇒ −1 e 0 são pto de inflexão

iv) Limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

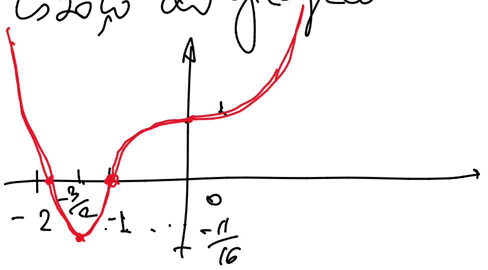
v) Imagens e raízes

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 1 = -\frac{11}{16}$$

$$f(0) = 0^4 + 2\,0^3 + 1 = 1$$

$$f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + 1 = 0$$

vi) Esboço do gráfico



L4)13)b) $f(x) = 3 + \dfrac{x}{x^2+1}$

i) $D_f = \mathbb{R}$

ii) $f'(x) = 0 + \dfrac{1(x^2+1) - x.2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,+\infty[$
f	↘		↗		↘
f'	$-$		$+$		$-$

$\Rightarrow -1$ é pto de mínimo local
1 é pto de máximo local

iii) $f''(x) = \dfrac{-2x(x^2+1)^{\cancel{2}} - (-x^2+1)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$

$f''(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2+1)^3}$

$f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

	$]-\infty,-\sqrt{3}[$	$]-\sqrt{3},0[$	$]0,\sqrt{3}[$	$]\sqrt{3},+\infty[$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$

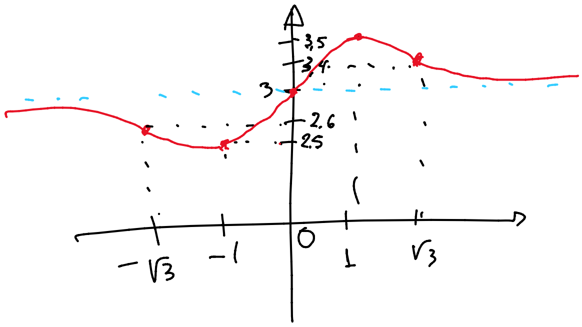
$\Rightarrow -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ são ptos de inflexão

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3 + \cancel{\dfrac{x}{x^2+1}}\right) = 3$ ($\to 0$) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 + \cancel{\dfrac{x}{x^2+1}}\right) = 3$ ($\to 0$)

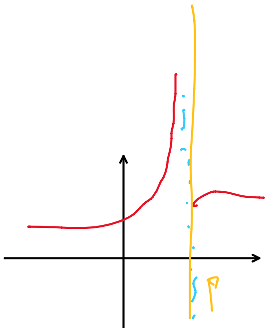
v) $f(-1) = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ $f(0) = 3$ $f(\sqrt{3}) = 3 + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \simeq 3{,}4$

$f(1) = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ $f(-\sqrt{3}) = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \simeq 2{,}6$

vi)



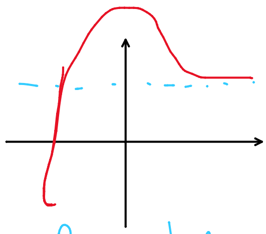
Assíntotas



vertical:

$$\lim_{x\to p^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

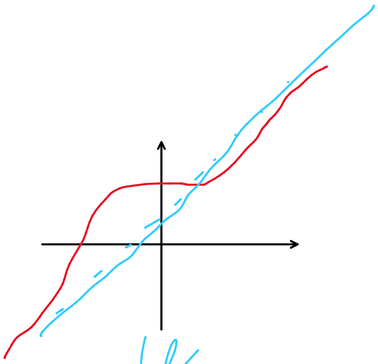
$$x = p$$



horizontal

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = k$$

$$y = k$$



oblíqua

?

Rascunho

$$\boxed{y(x) = mx + n}\ ,\ m \neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - y(x)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (mx+n)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right)} = n$$

achei

se

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\left(f(x) - mx - n\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{n}{x}\right) = 0$$

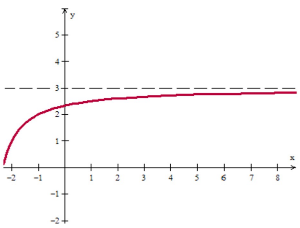
0 0 0 0

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

I) Assíntota horizontal

Definição:
Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, então $y = a$ é uma assíntota horizontal.

Exemplo:

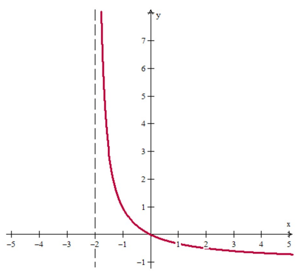


$y = 3$ é uma assíntota horizontal

II) Assíntota vertical

Definição:
Se $\lim_{x\to b^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, então $x = b$ é uma assíntota vertical.

Exemplo:



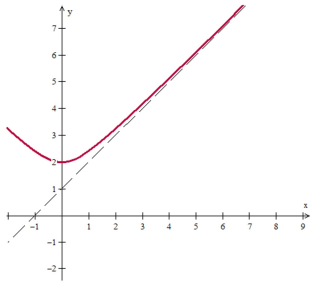
$x = -2$ é uma assíntota vertical

III) Assíntota oblíqua

Definição:

Se $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m, m \neq 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = n$, então $y = mx + n$ é uma assíntota oblíqua.

Exemplo:



$y = x + 1$ é uma assíntota oblíqua

Exercício: Verifique a existência de assíntotas oblíquas para $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} - 1x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x}{x^2+1}\right] = 0$$

$\Rightarrow y = mx + n \Rightarrow y = 1x + 0$ é assíntota oblíqua