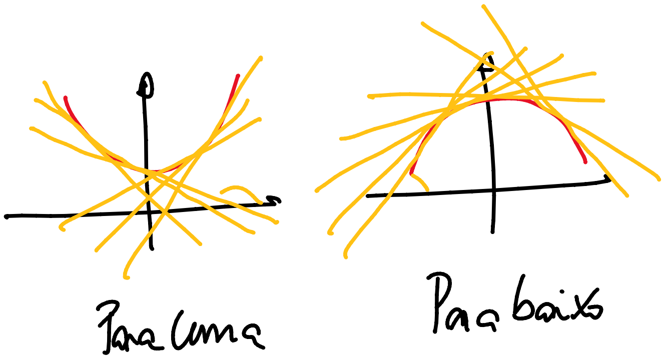
Concavidade e pontos de inflexão (T4)



Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I. A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

$$y - f(p) = f'(p)(x-p) \text{ ou } y = f(p) + f'(p)(x-p).$$

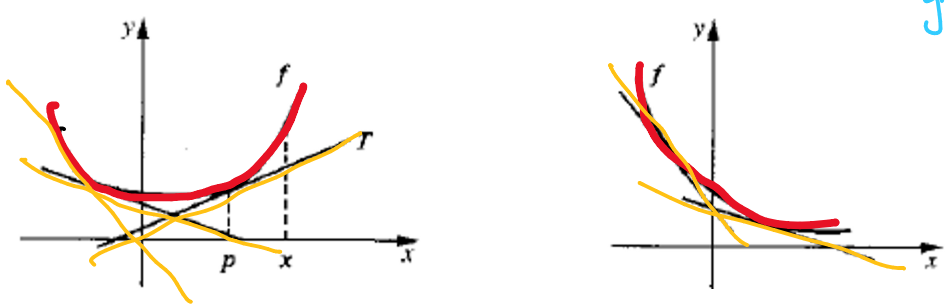
Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x-p).$$

<u>Definição</u>: Dizemos que f tem a concavidade para cima no interior do aberto I se

$$f(x) > T_p(x) \implies \underbrace{f(x) - T(x)}_{= g(x)} > 0$$

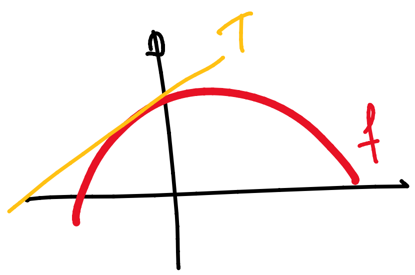
quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.



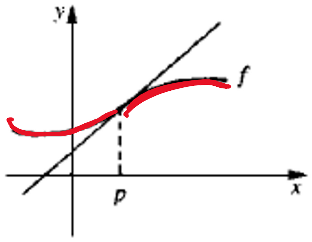
<u>Definição</u>: Dizemos que f tem a concavidade para baixo no interior do aberto I se

$$f(x) < T(x)$$

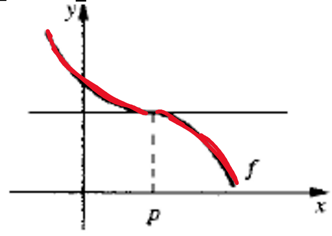
quaisquer que sejam x e p em I, com $x \neq p$.



Definição: Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p. Dizemos que p é ponto de inflexão de f se existirem números reais a e b, com $p \in]a,b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a,p[$ e em $]p,b[$.



p é ponto de inflexão de f
(ponto de inflexão oblíquo)



p é ponto de inflexão de f
(ponto de inflexão horizontal)

Teorema: Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo I.

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.
b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

Demonstração:

a) $p \in D_f \Rightarrow T_p(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$

Considere $g(x) = f(x) - T_p(x)$

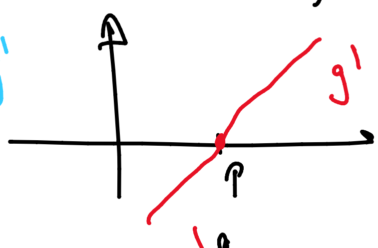
$g'(x) = f'(x) - T_p'(x) = f'(x) - f'(p)$

$g'(p) = f'(p) - f'(p) = 0$

$((g')' = g'')$

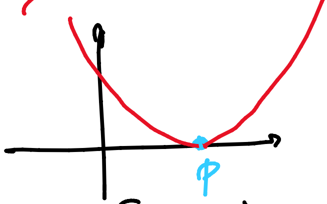
$g''(x) = f''(x) - 0 = f''(x) > 0$ --> g' é estritamente crescente

gráfico de g'



$\Rightarrow \begin{cases} g'(x) < 0, \forall x < p \\ g'(x) > 0, \forall x > p \end{cases}$

gráfico de g



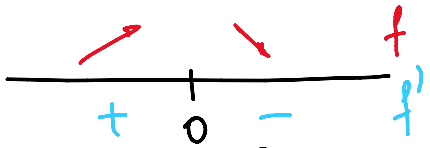
$g(p) = f(p) - S(p) = f(p) - [f(p) + f'(p)\cancel{(p-p)}^{0}] = 0$

$\Rightarrow g(x) > 0, \forall x \neq p$ e $\forall p \Rightarrow f(x) > T(x), \forall x$ e $\forall p$

b) Exercício.

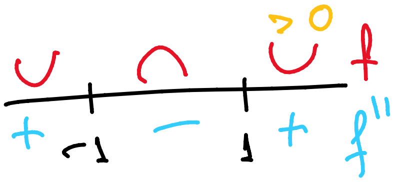
Exercício: Estude quanto à concavidade $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\right)' = \underbrace{-x}\,\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0}$$



$\Rightarrow$ 0 é pto de máximo global.

$$f''(x) = -1\, e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)\left(-x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \underbrace{(x^2-1)}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$



$\Rightarrow$ -1 e 1 são pontos de inflexão

$f(0) = 1,$
$f(-1) = e^{-1/2} = f(1)$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{x^2}{2}}}_{+\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$