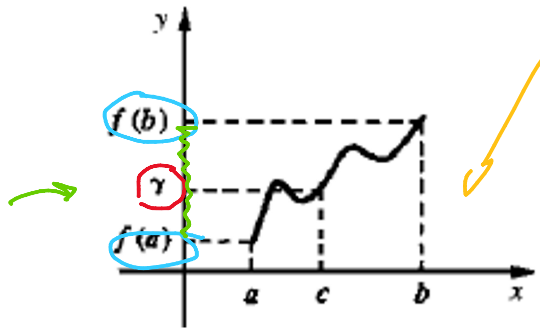
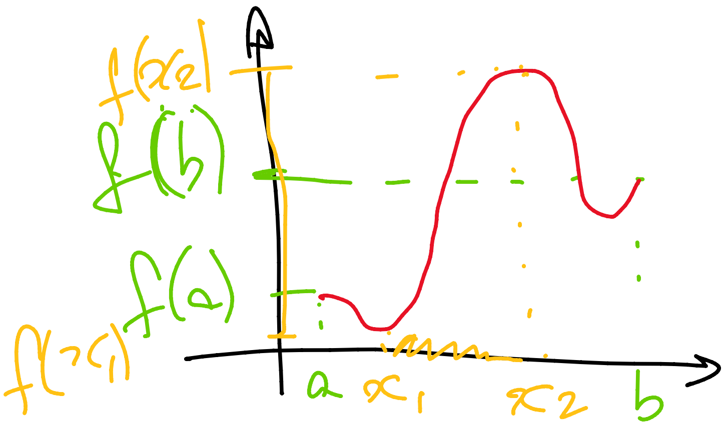
TVI e Regras de L'Hospital (T4 e T5)

<u>Teorema do Valor Intermediário</u>: Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.



<u>Exercício</u>: Seja $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que f não seja constante em $[a, b]$. Prove que existem números reais m e M, com $m < M$, tais que $Im_f = [m, M]$



Como f é contínua em $[a,b]$, pelo teo. Weierstrass. $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tq. $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ Suponha $x_1 < x_2$

Temos que $f|_{[x_1,x_2]}$ (i.é, f restrita ao intervalo $[x_1,x_2]$) é contínua

Seja γ entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, pelo T.V.I, $\exists\, c$ entre x_1 e x_2 tq $f(c) = \gamma$.

Sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$

Regras de L'Hospital

Observação: As regras de L'Hospital se aplicam **APENAS** para cálculos de limites com as indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

1ª Regra de L'Hospital:

Sejam f e g deriváveis em $]p-r, p[$ e em $]p, p+r[$, com $r > 0$ e $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x-p| < r$.
Nessas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to p} g(x) = 0$$

e se $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \to p} \frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

não é regra da derivada de $\frac{f}{g}$

2ª Regra de L'Hospital:

Sejam f e g deriváveis em $]p-r, p[$ e em $]p, p+r[$, com $r > 0$ e $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x-p| < r$.
Nessas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to p} g(x) = +\infty$$

e se $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \to p} \frac{\overset{\to +\infty}{f(x)}}{\underset{\to +\infty}{g(x)}} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação: Ambas regras de L'Hospital valem para os demais tipos de limites, ou seja, para $x \to p^+, x \to p^-, x \to +\infty, x \to -\infty$ e também, na 2ª regra, para as indeteminadas do tipo $\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}$ e $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Exemplos: Calcule os seguintes limites

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - 18x^2 + 8}{4x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{20x^3 - 36x}{12x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{20x^2 - 36}{12x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{40x}{12} = +\infty$$

Observação: Na verdade, é melhor calcular assim

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1 - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right)}{x^4\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)} = +\infty$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

c) $$\lim_{x\to0^+} x \ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{-1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to0^+} -x\ln^2 x$$

Piorou!

não dá certo!

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{0 - \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

c) $$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{\cancel{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{1\operatorname{sen} x + x\cos x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\underbrace{\operatorname{sen} x}_{0}}{\underbrace{\cos x}_{1} + \underbrace{1\cos x}_{1} - \underbrace{x \operatorname{sen} x}_{0}} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \overset{0^0}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = (*)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0}$ $\quad (*) = e^0 = 1$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = (*)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{-3/\cancel{x^2}}{1+3/x}}{-1/\cancel{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{1+\underbrace{3/x}_{0}} = 3$

$(*) = e^3$

Obs: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$