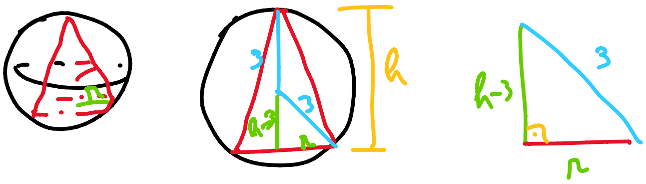
Exercício (T4 e T5)

16. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.



$6 \geq h \geq 3$

$V = \frac{1}{3} A_b . h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$3^2 = r^2 + (h-3)^2$

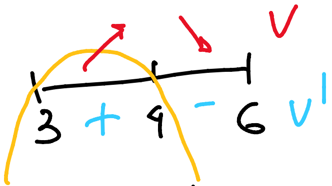
$r^2 = \cancel{9} - h^2 + 6h - \cancel{9}$

$\boxed{r^2 = 6h - h^2}$

$V(h) = \frac{\pi}{3} . (6h - h^2) h$

$V(h) = \frac{\pi}{3} (6h^2 - h^3)$

$V'(h) = \frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) = \frac{\pi}{3} . 3h (4-h) = 0 \Leftrightarrow \cancel{h=0}$ ou $h = 4$



$\Rightarrow$ 4 é pto de máximo de V em [3,6]

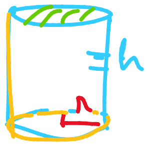
$\Rightarrow h = 4$ r.m. $= r = \sqrt{6.4 - 4^2} = \sqrt{24-16} = 2\sqrt{2}$ r.m.

$0 \leq h \leq 3$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 . h$

1 Ilustração

15. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?



$V=\pi r^2 h$ $\qquad \frac{h}{d}=?$ onde $d=2r$

$A=\pi r^2+2\pi r h+\pi r^2$

$\boxed{A=2\pi r^2+2\pi r h}$ $\qquad \boxed{V=\pi r^2 h}$ $\qquad \left(\frac{1}{r}\right)'=-\frac{1}{r^2}$

$\boxed{h=\frac{V}{\pi r^2}}, r\neq 0$

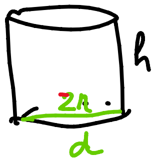
$A(r)=2\pi r^2+2\cancel{\pi r}\cdot\frac{V}{\cancel{\pi r^2}}$ $\qquad A(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$

$A'(r)=\frac{4\pi r^3}{\cancel{r^2}}-\frac{2V}{r^2}=\frac{2(2\pi r^3-V)}{r^2}=0 \Leftrightarrow r^3=\frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

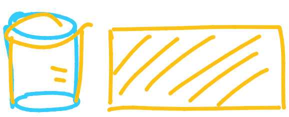
		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	
V'	$-$		$+$
V	↘		↗

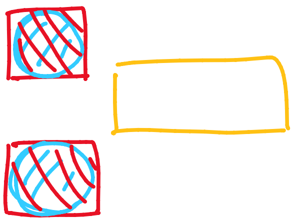
$h=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}=\frac{V}{\pi}\cdot\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$

$\frac{h}{d}=\frac{h}{2r}=\frac{\frac{V}{\pi}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{V}\right)^2}}{2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=\frac{\cancel{V}}{\cancel{2\pi}}\sqrt[3]{\frac{\cancel{(2\pi)^3}}{\cancel{V^3}}}=1$



(b) Por que as latas encontradas no mercado não são, em geral, como em (a)? Tipicamente o metal é entregue em chapas retangulares. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.





5.8. (P1-2016) Seja f uma função derivável definida em um intervalo aberto centrado em $x = 0$ e dada implicitamente pela equação

$$y^3 + xy^2 + y = 2\sin(x) + 2.$$

O valor de $f'(0)$ é

a. $\frac{1}{4}$; **b.** $\frac{1}{2}$; **c.** $-\frac{3}{4}$; **d.** $-\frac{14}{13}$; **e.** $\frac{6}{13}$.

Seja $y = f(x) \Rightarrow (f(x))^3 + x(f(x))^2 + f(x) = 2\sin x + 2$

$f(0) = ? \Rightarrow (f(0))^3 + 0.(f(0))^2 + f(0) = 2\sin 0 + 2$

$(f(0))^3 + f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = 1$

$y^3 + y - 2 = 0 \Rightarrow (y-1)(y^2 + y + 2) = 0$ $\neq 0$

$\Delta = 1 - 8 < 0$

$y^3 + y - 2 \mid y - 1$

$\underline{-y^3 + y^2}$ $\quad y^2 + y + 2$

$y^2 + y$

$\underline{-y^2 + y}$

$2y - 2$

$\underline{-2y + 2}$

0

$(f(x))^3 + x(f(x))^2 + f(x) = 2\sin x + 2$

$3(f(x))^2 . f'(x) + 1.(f(x))^2 + x\,2 f(x).f'(x) + f'(x) = 2\cos x + 0$

$(x=0) \Rightarrow 3(f(0))^2 . f'(0) + (f(0))^2 + 0.2 f(0).f'(0) + f'(0) = 2\cos 0$

$\Rightarrow 3.1 f'(0) + 1^2 + 0 + f'(0) = 2.1 = 2 \Rightarrow \boxed{f'(0) = \frac{1}{4}}$

5.10. (P1-2016) Dentre todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, a única que passa pelo ponto $(1, 0)$ é

a. $x = 1 + 4y$; **b.** $x = 1 - y$; **c.** $x = 1 + 2y$; **d.** $x = 1 + 3y$; **e.** $x = 1 + 5y$.

Seja $p \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}}$

$y - f(p) = f'(p)(x - p)$

$t: \boxed{y - \dfrac{p^2+1}{p-1} = \dfrac{p^2 - 2p - 1}{(p-1)^2}(x - p)}$

$(1,0) \in t \Rightarrow 0 - \dfrac{p^2+1}{p-1} = \dfrac{p^2-2p-1}{(p-1)^2}(1-p) \Rightarrow \dfrac{-(p^2+1)(p-1)}{\cancel{(p-1)^2}} = \dfrac{(p^2-2p-1)(1-p)}{\cancel{(p-1)^2}}$

$\Rightarrow -\cancel{p^3} \cancel{-p} + \cancel{p^2} \cancel{+p} + 1 = \cancel{p^2} \cancel{-2p} - 1 - \cancel{p^3} + 2p^2 \cancel{+p} \Rightarrow 2p^2 = 2 \Rightarrow \cancel{p = 1}$ ou $p = -1$

$\notin D_f$

$f(-1) = -1$ e $f'(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow x = 2y + 1$

5.11. (P1-2016) Considere as seguintes afirmações:

I. Se g é limitada e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} |g(x)f(x)| = +\infty$.

II. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2$ então, f é derivável.

III. Se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é descontínua em x_0 e limitada então, $f(x) = xg(x)\sin(x)$ é derivável em $x_0 = 0$.

São corretas

a. nenhuma das afirmações;

b. todas as afirmações;

c. somente as afirmações (I) e (II);

d. somente as afirmações (I) e (III);

e. somente as afirmações (II) e (III).

F I) $g(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow |g(x)| \leq 1$ e $\nexists \lim_{x\to+\infty} |f(x)g(x)|$

$f(x) = x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

V II) $p \in D_f$ $\quad f'(p) = ?$

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = ?$$

$$\frac{|f(x)-f(p)|}{|x-p|} \leq \frac{|x-p|^2}{|x-p|} = |x-p|$$

$$-\cancel{|x-p|} \leq \cancel{\left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right|} \leq \cancel{|x-p|}$$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

V III) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\, g(x) \operatorname{sen} x - 0}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} g(x) \cancel{\operatorname{sen} x} = 0$

limitada $\qquad 0$

Obs: $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = 0$

$(L \neq 0)$ $\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = |L| \\ \lim_{x\to p} |f(x)| = |L| \cancel{\Rightarrow} \lim_{x\to p} f(x) = L \end{cases}$

$f(x) = \frac{|x|}{x}$

5.14. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ e existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que para todos $a > 0$ e $b > -a$ temos

$$f(a+b) - f(a) = \frac{kb}{a^2+ab}. \quad \Rightarrow f(3+h)-f(3) = \frac{k.h}{3^2+3h}$$

Então $f'(3)$ é igual a:

a. $1/6$; **b.** $1/3$; **c.** $1/2$; **d.** $2/3$; **e.** $5/6$.

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{k.\cancel{h}}{9+3h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{9+3h} = \frac{k}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$x-3=h$

$x=3+h$

$$f(a+b)-f(a) = \frac{kb}{a^2+ab}$$

Se $a=1$ e $b=1$, então

$$3=2-(-1)=f(2)-f(1)=f(1+1)-f(1) = \frac{k\,1}{1^2+1.1} = \frac{k}{2} \Rightarrow k=6$$

3.13. Responda, justificando:

a. Se $f+g$ é derivável em x_0, é verdade que f e g são necessariamente deriváveis em x_0?

b. Se $f \cdot g$ é derivável em x_0, quais condições sobre f garantem a derivabilidade de g em x_0?

F a) $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = |x| - |x| = 0$

b) $(f.g)' = f'g + fg'$ $\quad$ f tem que ser derivável

3.17. Suponha que $f(x) = xg(x)$, onde g é uma função contínua em $x_0 = 0$. Mostre que f é derivável em $x_0 = 0$ e calcule $f'(0)$ em termos de g.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}.g(x)-0}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$$

$$f(x) = xg(x) \Rightarrow \cancel{f'(x) = 1g(x) + xg'(x)}$$

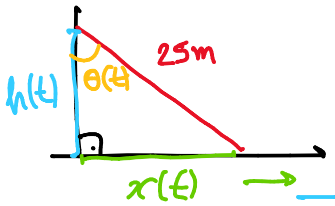
?

9. Uma escada de bombeiro com $25m$ está encostada na parede de um prédio e sua base se afasta da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a $7m$ da parede e sua velocidade é de $2m/s$.

a. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move nesse instante?

b. Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a $7m$ da parede.

c. Calcule a taxa de variação do ângulo formado entre a parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a $7m$ da parede.



$x(t_0) = 7m$

$x'(t_0) = 2m/s$

a) $h'(t_0) = ?$

$$h^2(t) + x^2(t) = 25^2$$

$$2h(t).\underbrace{h'(t)}_{?} + 2x(t).x'(t) = 0$$

b) $$A(t) = \frac{x(t).h(t)}{2}$$

$$A'(t) = \dots$$

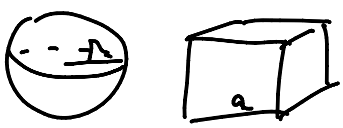
c) $$sen(\theta(t)) = \frac{x(t)}{25}$$

$$cos(\theta(t)).\theta'(t) = \frac{x'(t)}{25}$$

$$cos(\theta(t_0)).\underbrace{\theta'(t_0)}_{?} = \frac{x'(t_0)}{25}$$

$$cos(\theta(t_0)) = \frac{h(t_0)}{25} = ?$$

23) 17)



$$S = 4\pi r^2 + 6a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{2 - 4\pi r^2}{6}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + a^3 \qquad a = \sqrt{\frac{2 - 4\pi r^2}{6}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \left(\frac{2 - 4\pi r^2}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$