TVM - exercícios (T4)

1. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(d) $f(x) = x^e + e^x$

$$f'(x) = e x^{e-1} + e^x$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\ln x^\alpha}\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \cdot \ln x)'$$

$$= e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot x^{-1} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

escalar

$$(\alpha \cdot \ln x)' = \alpha \cdot (\ln x)'$$

funções

$$(\alpha \cdot \ln x)' = (\alpha)' \cdot \ln x + \alpha (\ln x)' = \alpha (\ln x)'$$

(k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\arcsin(x^2)} = e^{\arcsin x^2 \ln(e^x + 3x)} = e^{\arcsin x^2 \cdot \ln(e^x+3x)}$

$$f'(x) = e^{\arcsin x^2 \ln(e^x+3x)} \cdot \left(\arcsin x^2 \ln(e^x+3x)\right)'$$

$$f'(x) = (e^x+3x)^{\arcsin x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}(x^2)' \ln(e^x+3x) + \arcsin x^2 \cdot \frac{1}{e^x+3x}(e^x+3x)'\right)$$

$$f'(x) = (e^x+3x)^{\arcsin x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} 2x \ln(e^x+3x) + \arcsin x^2 \cdot \frac{1}{e^x+3x}(e^x+3)\right)$$

2. Achar os valores mínimo e máximo de:

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x,\ \boxed{\tfrac{1}{2}\le x\le 4}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2} = 0 \iff x=1$$

x	$\frac{1}{2}$		1		4
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(1)=\frac{1}{1}+\ln(1)=1$ é o valor mínimo de f em $[\frac{1}{2},4]$

$$f(1/2) = \frac{1}{1/2}+\ln(1/2) = 2+\ln 2^{-1} = 2-\ln 2$$

$$f(4) = \frac{1}{4}+\ln 4 = \frac{1}{4}+\ln 2^{2} = \frac{1}{4}+2\ln 2$$

$$e^2 < 8 = 2^3$$

$$2 = 2\ln e = \ln e^2 < \ln 2^3 = 3\ln 2$$

$$\boxed{2<3\ln 2}$$

$$f(1/2)-f(4) = 2-\ln 2-\left(\frac{1}{4}+2\ln 2\right) = 2-\frac{1}{4}-3\ln 2 = \frac{7}{4}-3\ln 2$$

$$2<3\ln 2$$

$$0 > -\frac{1}{4} = \frac{7}{4}-2 > \frac{7}{4}-3\ln 2 \Rightarrow \frac{7}{4}-3\ln 2<0 \Rightarrow f(1/2)-f(4)<0 \Rightarrow f(1/2)<f(4)$$

$\Rightarrow$ $f(4)$ é o valor máximo de f em $(1/2,4)$
$f(1)$ é o valor mínimo de f em $(1/2,4)$

---

f: cont. em $[a,b]$ e deriv. em $]a,b[$ $\Rightarrow \exists c\in\,]a,b[$ t.q. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

(b) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a-b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

Suponha $b<a$ e seja $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}$

$\exists\, c \in]b,a[$ tq. $f(a)-f(b)=f'(c)(a-b)$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{1}{2\sqrt{c}}(a-b)$

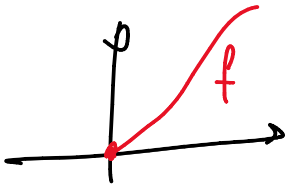
$|\sqrt{a}-\sqrt{b}| = \left|\frac{1}{2\sqrt{c}}\right| |a-b| \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}|a-b|$

$1 \leq b < c < a \Rightarrow c > 1 \Rightarrow \sqrt{c} > \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2}$ (*)

4. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1,+\infty[$ tal que $f(0)=0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x>0$. Mostre que $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

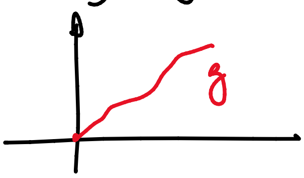
$f'(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow f$ é estrit. crescente, $\forall x>0$

Como $f(0)=0$, então $f'(x)>0, \forall x>0$



Para mostrar que $f(x) \leq x$, então basta mostrar que $x-f(x) \geq 0$

Seja $g(x)=x-f(x) \Rightarrow g'(x)=1-f'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ é crescente



Mas $g(0)=0-f(0)=0-0=0$

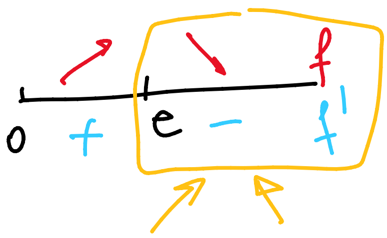
$\Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x>0 \Rightarrow x-f(x) \geq 0, \forall x>0 \Rightarrow x \geq f(x), \forall x>0.$

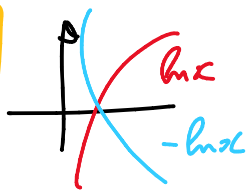
6. Quem é maior: e^{π} ou π^{e}?

$$f(x)=\underset{>0}{x}^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\frac{1}{x}\right)=\underset{>0}{x^{\frac{1}{x}}}\,\frac{(1-\ln x)}{\underset{>0}{x^{2}}}=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$$





f é estritamente decrescente para $x>e$

$$e<\pi \Rightarrow f(e)>f(\pi) \Rightarrow \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{e\pi}>\left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)^{e\pi} \Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}$$

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$$

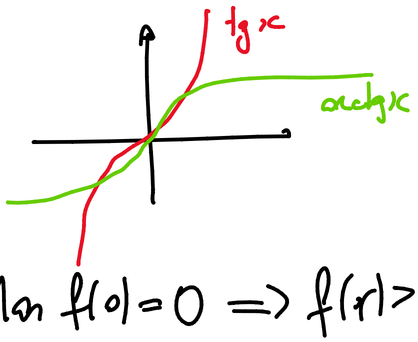
5. Mostre que $f(x)=(1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$.
Conclua que $(1+\pi)^{e}<(1+e)^{\pi}$.

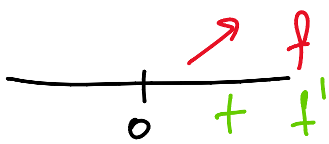
7. Prove as seguintes desigualdades:
(b) $2x\,\mathrm{arctg}\,x>\ln(1+x^2)$, para $x>0$

Seja $f(x)=2x\,\mathrm{arctg}\,x-\ln(1+x^2)$

$$f'(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x+2x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'$$

$$f'(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x+\cancel{\frac{2x}{1+x^2}}-\cancel{\frac{2x}{1+x^2}}=2\,\mathrm{arctg}\,x=0 \Leftrightarrow x=0$$





Mas $f(0)=0 \Rightarrow f(x)>0,\ \forall x>0 \Rightarrow 2\,\mathrm{arctg}\,x>\ln(1+x^2)\ \forall x>0$

8. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$.
Suponha que x_0 é ponto crítico de g. Prove que $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.
Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x.f'(x) - 1f(x)}{x^2}$$

$$0 = g'(x_0) = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} \Rightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Reta tg: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0$$

$$y = f'(x_0)x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)x_0}_{=0} \Rightarrow \boxed{y = f'(x_0)x}$$

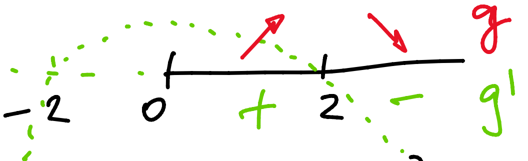
11. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a para o qual tem-se $f(x) \geq 28$, para todo $x > 0$.

$$f(x) = 5x^2 + \frac{a}{x^5} \geq 28$$

$$(x>0) \Rightarrow 5x^7 + a \geq 28x^5 \Rightarrow \underbrace{28x^5 - 5x^7}_{g(x)} \leq a$$

$\Rightarrow$ a é o valor máximo de $g(x) = 28x^5 - 5x^7$

$$g'(x) = 28.5x^4 - 5.7x^6 = 5x^4(28 - 7x^2) = 0 \Leftrightarrow \cancel{x=0} \text{ ou } x=2 \text{ ou } \cancel{x=-2}$$

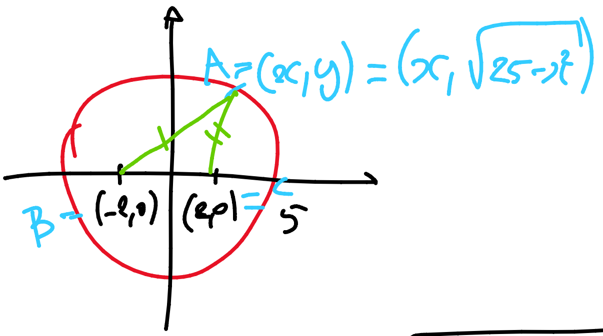


$\Rightarrow$ 2 é pto de máx de g

$$\Rightarrow a = g(2) = 28.2^5 - 5\,2^7 = 7.2^7 - 5\,2^7 = 2^8$$

14. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

$$\Downarrow \quad y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$



$$d(x) = d(A,B) + d(A,C) = \sqrt{(x-(-2))^2 + (\sqrt{25-x^2} - 0)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{25-x^2} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{\cancel{x^2} + 4x + 4 + 25 - \cancel{x^2}} + \sqrt{\cancel{x^2} - 4x + 4 + 25 - \cancel{x^2}} = \sqrt{29 + 4x} + \sqrt{29 - 4x}$$

$$d'(x) = \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}\sqrt{29+4x}} + \frac{-\cancel{4}\,2}{\cancel{2}\sqrt{29-4x}} = \frac{2\sqrt{29-4x} - 2\sqrt{29+4x}}{\sqrt{29+4x}\,\sqrt{29-4x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

-5		0		5
	+		−	
d	$\nearrow$		$\searrow$	

$\therefore$ ~~$d(0) = 2\sqrt{29}$~~

$$\left.\begin{array}{l} d(5) = \sqrt{49} + \sqrt{9} = 10 \\ d(-5) = \sqrt{9} + \sqrt{49} = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \text{ e } -5 \text{ são os pts de mínimo}$$