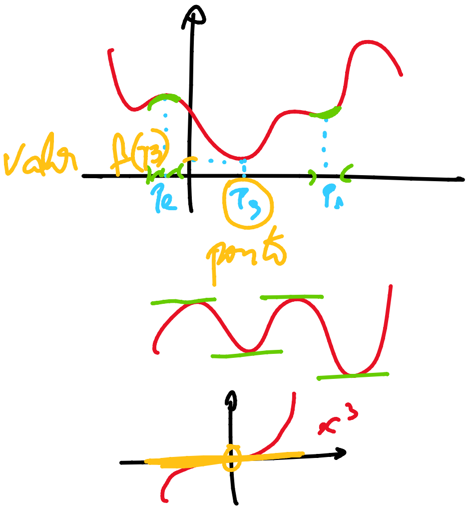
Máximos e mínimos

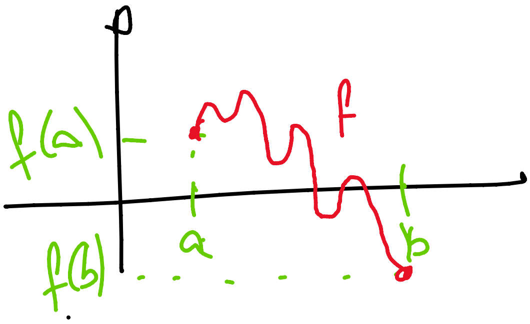


Def: $x_0 \in D_f$ é pto crítico se $f'(x_0)=0$

extremantes = máximos ou mínimos

Teorema de continuidade

Teorema do anulamento (Bolzano)



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. , $f(a)f(b)<0$

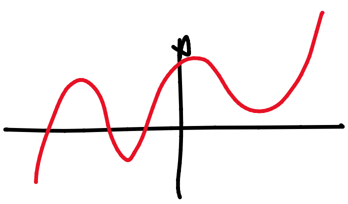
$\Rightarrow \exists\, c \in\,]a,b[$ tq $f(c)=0$

Exercício: Mostre que toda função polinomial de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

Resolução:

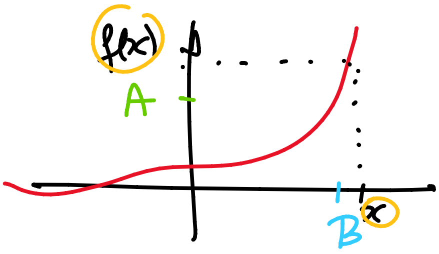
Seja $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ com n ímpar e $a_n \neq 0$

Suponha $a_n>0$



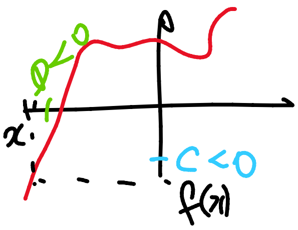
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x^n}\Big(\underset{>0}{a_n} + \overset{0}{\frac{a_{n-1}}{x}} + \dots + \overset{0}{\frac{a_2}{x^{n-2}}} + \overset{0}{\frac{a_1}{x^{n-1}}} + \overset{0}{\frac{a_0}{x^n}}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{dado } A>0,\ \exists B>0 \text{ tq. } x>B \Rightarrow f(x)>A>0$$



Seja $x_2 > B$, temos que $f(x_2) > A > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \overset{-\infty}{x^n}\Big(\underset{>0}{a_n} + \overset{0}{\cancel{\frac{a_{n-1}}{x}}} + \dots + \overset{0}{\cancel{\frac{a_1}{x^{n-1}}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{a_0}{x^n}}}\Big) = -\infty \quad \text{(pois } n \text{ é ímpar)}$$



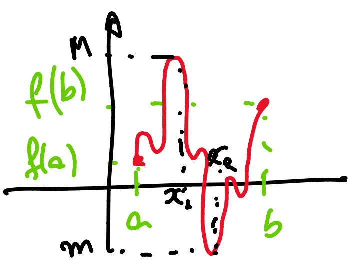
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow}$ dado $C<0$ $\exists D<0$ tq $\forall x<D \Rightarrow f(x)<C$.

Seja $x_1 < D \Rightarrow f(x_1) < C < 0$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, temos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$

Pelo T. Bolzano, temos que $\exists\, m \in]x_1, x_2[$ tq. $f(m) = 0$.

Teorema de Weierstrass



$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tq.

$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \forall x \in [a,b]$