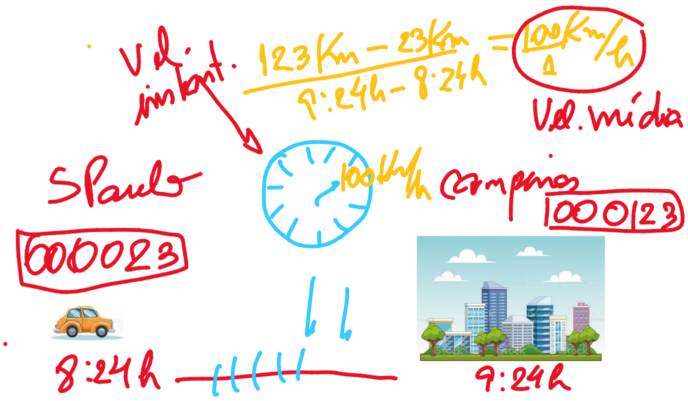
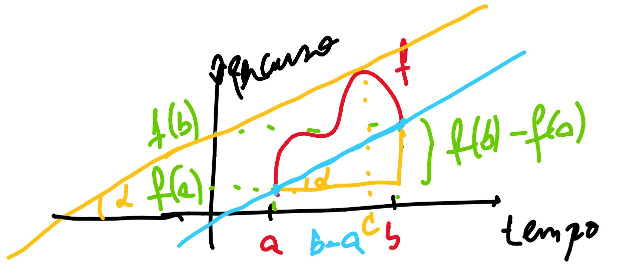
TVM (T4 e T5)

<u>Teorema do Valor Médio</u>





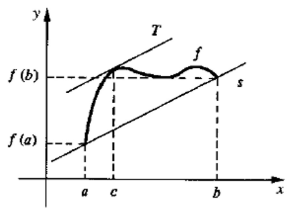
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\,\alpha$

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$

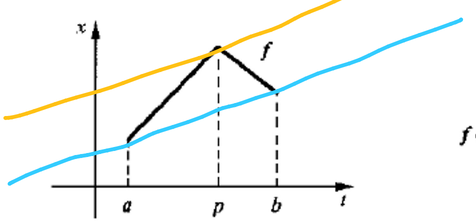
Então $\exists\, c \in]a,b[$ t.q. $\underbrace{f'(c)}_{\text{Veloc. instantânea}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Veloc. média}}$

<u>Teorema do Valor Médio (TVM)</u>: Se f for uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existirá pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que

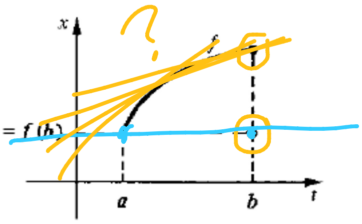
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \text{ou} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$



<u>Observação</u>: As hipóteses de continuidade e derivabilidade são importantes, pois ?



f não é derivável em p; não existe c verificando ①.



f não é contínua em $[a, b]$; não existe c verificando ①.

Consequências do TVM

Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema. Seja f contínua no intervalo I.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I.
b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.

Demonstração:

Def: f estritamente crescente se $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$
f estritamente decrescente se $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

a) Sejam $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$

Temos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$

$\boxed{T.V.M} \Rightarrow \exists c \in]x_1, x_2[$ tq. $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f$ é estritamente crescente em I

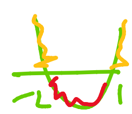
Exercício: Estude quanto ao crescimento e decrescimento

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

	-2		1		
↗		↘		↗	f
+		−		+	f'



f é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$ e $]1, +\infty[$
f é estritamente decrescente em $]-2, 1[$

2. Achar os valores mínimo e máximo de:

(a) $f(x) = \sin x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$

$f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ contínua

(Teorema de Weierstrass) $\Rightarrow \exists$ máx $\exists$ min

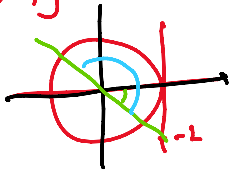
Os candidatos são os pontos críticos e os extremos

$f'(x) = \cos(x) - (-\operatorname{sen} x) = \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow$

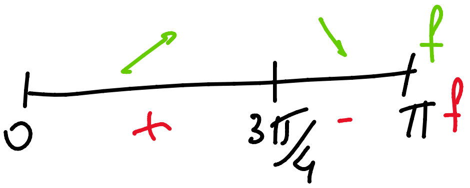
$f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/2) = 0 + 1 = 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos(x)}{\cos x} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $x \in]0,\pi[- \{\frac{\pi}{2}\}$

$1 = -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1$



$\cancel{-\pi/4}$ $3\pi/4$



valor min

$f(0) = \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = -1$

$f(3\pi/4) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$f(\pi) = \operatorname{sen}\pi - \cos\pi = 1$

valor máx