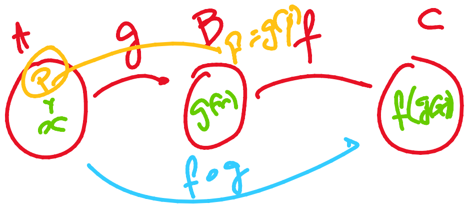
Derivada - parte 4 (T4 e T5)

Regra da cadeia (derivação de função composta)

Teorema (regra da cadeia): Sejam f e g duas funções com $Im_g \subset D_f$, tais que g é derivável em p e f é derivável em $q = g(p)$, então $F(x) = (f \circ g)(x)$ é derivável em p e

$$F'(p) = (f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p)$$



$$(f\circ g)'(p) = f'(g(p))\cdot g'(p)$$

Notação de Leibniz:

$$\left.\begin{array}{l} y = g(x) \\ z = f(y) \end{array}\right\} \xRightarrow{Im_g \subset D_f} z = f(g(x))$$

x

y

$$z(x) = f(g(x))$$

$$z'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$$

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x)$$

derivada $\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}}$

Notação de Leibniz: $z = f(y)$ e $y = g(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Exercício: Calcule a derivada

a) $F(x) = \operatorname{sen}(x^2 + x)$

$$\left.\begin{aligned} y &= g(x) = x^2 + x \\ z(y) = z &= f(y) = \operatorname{sen} y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{z(x)}{\overset{\shortparallel}{z}} = f(g(x)) = \operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen}(x^2+x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(y) = \cos y \Rightarrow f'(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos(x^2+x)$$

$$g'(x) = 2x+1$$

$$(\cos(x^2+x))' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \cos(x^2+x)\,(2x+1)$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $F(x) = \overset{f}{\sqrt{\underbrace{x^3 + 5x^2 + x}_{g}}}$

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}(3x^2+10x+1) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+5x^2+x}}(3x^2+10x+1)$$

c) $F(x) = \operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$ $\qquad (y^2)' = 2y$

$$F(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$$

Sem Regra da Cadeia

$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$

$$F'(x) = (\operatorname{sen} x)' \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)'$$

$$F'(x) = \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x$$

$$F'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Com Regra da Cadeia $\quad F'(x) = 2(\operatorname{sen} x).(\operatorname{sen} x)'$

$$= 2 \operatorname{sen} x . \cos x$$

Com Regra da Cadeia $\quad F(x) = \operatorname{sen}^5 x \Rightarrow F'(x) = 5(\operatorname{sen} x)^4 . \cos x$

d) $F(x) = \cos(3x) \Longrightarrow F'(x) = -\operatorname{sen}(3x).(3x)' = -\operatorname{sen}(3x).3$

e) $F(x) = (3x^5 + 5x^3)^4$ $\qquad (y^4)' = 4y^3$

$F'(x) = 4(3x^5+5x^3)^3.(15x^4+15x^2)$

$(5x^3)' = 5.3x^2$
$= 15x^2$

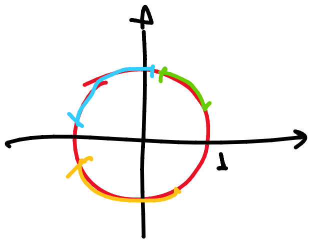
<u>Função dada implicitamente</u>

<u>Definição</u>: Dizemos que uma função $y = f(x)$ é dada implicitamente por uma equação E se $(x, f(x))$ satisfaz E.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

<u>Exemplo</u>: $\qquad E: x^2+y^2 = 1$

$x^2+y^2=1$



$x = \pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \begin{cases} f_1(y) = \sqrt{1-y^2} \\ f_2(y) = -\sqrt{1-y^2} \end{cases}$

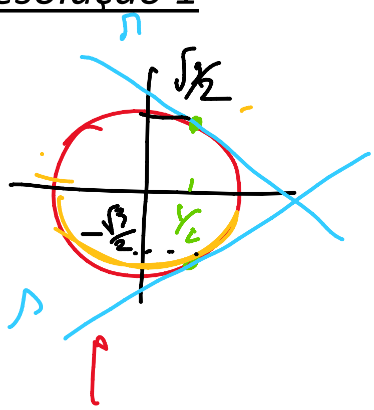
$y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} g_1(x) = \sqrt{1-x^2} \\ g_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$E: x^2+y^2=1$

$(x, g_1(x))$ satisfaz E, pois $x^2+(g_1(x))^2 = x^2+(\sqrt{1-x^2})^2 = x^2+1-x^2 = 1$

Exercício: Determine a equação da reta tangente à circunferência de raio 1 centrado na origem, no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$.

Resolução 1



$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$y-f(1/2)=f'(1/2)(x-1/2)$$

$$f(1/2)=\sqrt{1-(1/2)^2}=\sqrt{3}/2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'$$

$$f'(x)=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(1/2)=\frac{-1/2}{\sqrt{1-(1/2)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$g(x)=-\sqrt{1-x^2}$ (exercício)

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1/2)$$

Resolução 2

$$x^2+y^2=1, \quad y=f(x)$$

$$x^2+(f(x))^2=1$$

$$\left(x^2+(f(x))^2\right)'=(1)'$$

$$\cancel{2}x+\cancel{2}(f(x))^{1}\cdot f'(x)=0$$

$$x+f(x)\cdot f'(x)=0$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{x}{f(x)}}$$

$$y-f(1/2)=f'(1/2)(x-1/2)$$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=1\\ x=1/2\end{array}\right\}\Rightarrow (1/2)^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \text{ou}\\ y=-\sqrt{3}/2\end{cases}$$

$$f(1/2)=y=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow f'(1/2)=\frac{-1/2}{f(1/2)}=\frac{-1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \boxed{y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1/2)}$$

$$f(1/2)=y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow f'(1/2)=\frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \boxed{y-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1/2)}$$

EXEMPLO 4. Seja $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a função dada implicitamente pela equação $y^3 + y = x$. Suponha que f seja derivável.

a) Mostre que $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{3[f(x)]^2 + 1}}$.

b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(10, f(10))$.

a) $y^3 + y = x$

$\boxed{(f(x))^3 + f(x) = x} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{1}{3(f(x))^2 + 1}}$

$3(f(x))^2 . f'(x) + f'(x) = 1$

b) $y - f(10) = f'(10)(x - 10)$

$(f(10))^3 + f(10) = 10$ Por inspeção, $f(10) = 2$

(Verifique que é a única resposta)

$f'(10) = \dfrac{1}{3(2)^2+1} = \dfrac{1}{13} \Rightarrow \boxed{y - 2 = \frac{1}{13}(x - 10)}$

Exercício:

3.21. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo que f é derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

$x^2 = y^3(2 - y)$

$x^2 = 2y^3 - y^4 \Rightarrow 1 = 2.f(1)^3 - f(1)^4$

$x^2 = 2(f(x))^3 - (f(x))^4$

$2x = 2.3(f(x))^2 f'(x) - 4(f(x))^3 f'(x)$

$x = 3(f(x))^2 f'(x) - 2(f(x))^3 f'(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x}{3f^2(x) - 2f^3(x)}$

$\Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{3f(1) - 2f^3(1)} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 1)$