Derivada - parte 3 (T4)

Regras de derivação

a) $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = 2x + \cos x$

b) $f(x) = 5.\cos x \Rightarrow f'(x) = 5(-\operatorname{sen} x) = -5\operatorname{sen} x$

c) $f(x) = x \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = ?$

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \qquad g'(p) = \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}$$

Regras de derivação: Sejam f, g duas funções deriváveis em $p \in A$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante, então $f + g,\ k.f,\ f.g,\ \frac{f}{g}$ também são deriváveis no ponto p e valem:

a) $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$
b) $(k.f)'(p) = k.f'(p)$
c) $(f.g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$
d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$

Dem.

c) $$(f.g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{(f.g)(x) - (f.g)(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(x) + f(p)g(x) - f(p)g(p)}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(p)}{x - p}}_{f'(p)} g(x) + f(p) \underbrace{\frac{g(x) - g(p)}{x - p}}_{g'(p)} \right] = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

pois como g é derivável em p, então g é contínua em p.

$$d)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(p)}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{\frac{f(x)g(p)-f(p)g(x)}{g(x).g(p)}}{x-p}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(p) - f(p)g(p) + f(p)g(p) - f(p)g(x)}{x-p} \cdot \frac{1}{g(x)g(p)}$$

$$= \lim_{x\to p} \left[\underbrace{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}_{f'(p)} \cdot g(p) - f(p)\, \underbrace{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}}_{g'(p)} \cdot \frac{1}{\underbrace{g(x)}_{g(p)}g(p)}\right] = \frac{f'(p).g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$$

Exemplo:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - \operatorname{sen} x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \,.\cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Exercício: Calcule as seguintes derivadas $\qquad (x^m)' = m.x^{m-1}$

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 3.x^{3-1} + 4.\,2x + 0 = 3x^2 + 8x$

b) $f(x) = x^2.\operatorname{sen}(x) = (x^2)'\operatorname{sen} x + x^2(\operatorname{sen} x)' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \sec^2 x$

d) $f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(1)'\cos x - 1(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{0\cos x - (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x . \operatorname{tg} x$$

e) $f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}\, x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\text{sen}\, x}\right)' = \frac{(1)'\,\text{sen}\, x - 1(\text{sen}\, x)'}{\text{sen}^2 x} = \frac{0\,\text{sen}\, x - \cos x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}\, x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = -\text{cossec}\, x \cdot \text{cotg}\, x$$

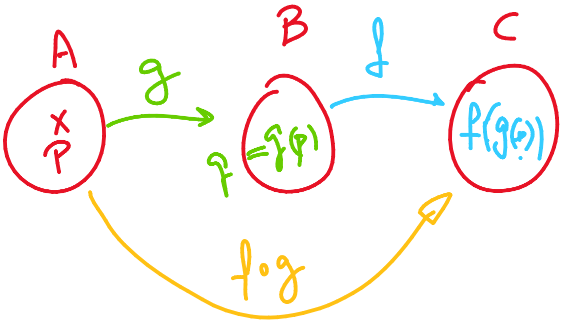
f) $f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'\,\text{sen}\, x - \cos x\,(\text{sen}\, x)'}{\text{sen}^2 x} = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -\text{cossec}^2 x$$

Notação de Leibniz para a derivada

$y = f(x)$ $\quad \frac{dy}{dx}(x) = f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ $\qquad f'(p) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=p} = \frac{df}{dx}(p) = \frac{dy}{dx}(p)$

Regra da cadeia (derivação de função composta)



$$\boxed{(f \circ g)'(p) = f'(g(p)) \cdot g'(p)}$$

Regra da cadeia (derivação de função composta)

Teorema (regra da cadeia): Sejam f e g duas funções com $Im_g \subset D_f$, tais que g é derivável em p e f é derivável em $q = g(p)$, então $F(x) = (f \circ g)(x)$ é derivável em p e

$$F'(p) = (f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p)$$

<u>Demonstração</u>: (caso particular)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Suponha $g(x) \neq g(p)$, $x \neq p$

$$(f \circ g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x - p} =$$

$$= \lim_{x \to p} \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(p))}{g(x) - g(p)}}_{f'(g(p))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(p)}{x - p}}_{g'(p)} = f'(g(p)) \cdot g'(p)$$

$y = g(x)$

$$f'(p) = \lim_{y \to p} \frac{f(y) - f(p)}{y - p} = \lim_{x \to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{g(x) - g(p)}$$

<u>Notação de Leibniz</u>: $z = f(y)$ e $y = g(x)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

<u>Exercício</u>: Calcule a derivada

a) $F(x) = \text{sen}(x^2 + x)$

$$\left.\begin{aligned} f(y) &= \text{sen}\, y \\ g(x) &= x^2 + x \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x) = f(g(x)) = \text{sen}(g(x)) = \text{sen}(x^2+x)$$

$g'(x) = 2x + 1$

$f'(y) = \cos y$

$f'(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos(x^2 + x)$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$(\text{sen}(x^2+x))' = \cos(x^2+x)(2x+1)$$