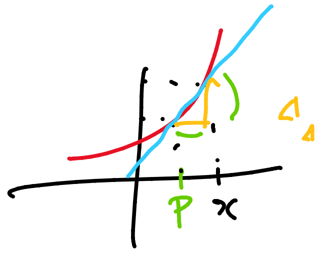
Derivada - parte 2 (T4 e T5)

<u>Definição</u>: Sejam f um função e p ∈ D_f,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \in \mathbb{R}$$



d) $f(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ Se $p \in D_f$

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{p}}{x-p} \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{p})}{(\sqrt{x}+\sqrt{p})} = \lim_{x\to p} \frac{\cancel{x-p}}{\cancel{x-p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{p}} = \lim_{x\to p} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{p}} = \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

e) $f(x) = \text{sen}(x)$

Obs: $\boxed{\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}} \overset{!}{=} \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}}$

$h = x - p \Rightarrow h \to 0$
$x = p + h$

$$\boxed{f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(p+h) - \text{sen}\,p}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{\cancel{p}+h-\cancel{p}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+h+p}{2}\right)}{h}$$

(a: $p+h$, b: p)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2}\,\text{sen}\,(h/2) \cdot \cos\left(\frac{2p+h}{2}\right)}{h/\cancel{2}} = \cos p$$

$\to 1$

$\text{sen}\,a - \text{sen}\,b = 2\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\boxed{f(x) = \text{sen}\,x \Rightarrow f'(x) = \cos x}$$

f) $f(x) = \cos(x)$

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{\cos x - \cos p}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{-2\,\text{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)}{\frac{x-p}{2}\cdot 2} = -\,\text{sen}\,p$$

$\to 1$

<u>Observação</u>:
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)$

Portanto, $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$

Fazendo $x = a+b$ e $p = a-b$,
Temos que

$$\boxed{\cos(x) - \cos(p) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)}$$

Teorema: Se f é derivável em p, então f é contínua em p.

Observação: Portanto, se f não é contínua em p, então f não é derivável em p.

$$\boxed{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \tilde{n}A \Leftarrow \tilde{n}B \end{array}}$$

Demonstração:

f cont em $p \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p) \Leftrightarrow \lim_{x\to p}(f(x)-f(p)) = 0$

De fato, $\lim_{x\to p}(f(x)-f(p)) = \lim_{x\to p}\underbrace{\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\right)}_{f'(p)}\underbrace{(x-p)}_{0} = 0$

Por hipótese, $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \overset{\exists}{=} f'(p)$

Observação: a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é dado por $y = x$.

De fato, $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

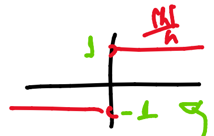
$f'(0) = \cos 0 = 1$

$y - \operatorname{sen} 0 = \cos 0(x-0)$

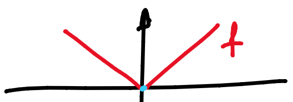
$y = x$

Exercício: Verifique se f é derivável em $x = 0$.

a) $f(x) = |x| \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$



$\Rightarrow f'(x) \stackrel{?}{=} \lim \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ (não existe, pois os limites laterais são diferentes).



$\Rightarrow f(x) = |x|$ não é derivável em $x=0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x.\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$f'(0) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\,\text{sen}(1/x) - 0}{\cancel{x} - 0}$ (não existe)

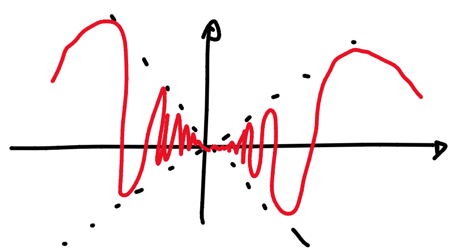
$\Rightarrow f$ não é derivável em $x=0$.

Porém f é contínua em $x=0$, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{0}\, \underbrace{\text{sen}(1/x)}_{\text{limitada}} = 0$

$\parallel$

$f(0) = 0$

f é cont. em $x=0$

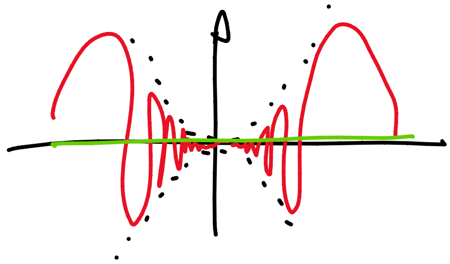


b') $f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}(1/x) & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0) \Rightarrow f$ não é cont. em $x=0 \Rightarrow f$ não é derivável em $x=0$

$$\text{c)}\quad f(x) = \begin{cases} x^2.\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

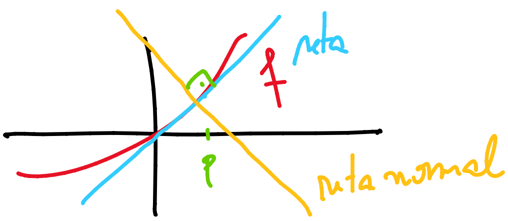
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\,\overset{\text{limt}}{\text{sen}(1/x)}-0}{\cancel{x-0}} = 0 = f'(0)$$



reta tangente $y - f(p) = f'(p)(x-p)$

Definição: Seja f uma função derivável no ponto p, com $f'(p) \neq 0$. A reta normal ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é dada por:

$$y - f(p) = -\frac{1}{f'(p)}(x-p).$$



$r: y = mx + a \qquad s: y = nx + b$

$r \perp s \Leftrightarrow m \cdot n = -1 \Leftrightarrow \boxed{m = -\frac{1}{n}}$

Exercício: Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(3, \sqrt{3})$.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

reta tangente: $y - f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow \boxed{y - \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3)}$

reta normal: $y - f(3) = \frac{-1}{f'(3)}(x-3) \Rightarrow \boxed{y - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}(x-3)}$

Regras de derivação

$$f(x) = tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} \Rightarrow f'(x) = ?$$

---

a) $f(x) = x^2 + sen\,x \Rightarrow f'(x) = 2x + cos\,x$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$

b) $f(x) = 5\,cos\,x \Rightarrow f'(x) = 5(-sen\,x) = -5\,sen\,x$

c) $f(x) = x\,sen\,x \Rightarrow f'(x) = ?$

Regras de derivação: Sejam f, g duas funções deriváveis em $p \in A$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante, então $f + g,\ k.f,\ f.g,\ \frac{f}{g}$ também são deriváveis no ponto p e valem:

a) $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$
b) $(k.f)'(p) = k.f'(p)$
c) $(f.g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$
d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$

$$(tg\,x)' = \left(\frac{sen\,x}{cos\,x}\right)' = \frac{(sen\,x)'\,cos\,x - sen\,x\,(cos\,x)'}{(cos\,x)^2} = \frac{cos\,x\,cos\,x - sen\,x\,(-sen\,x)}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$