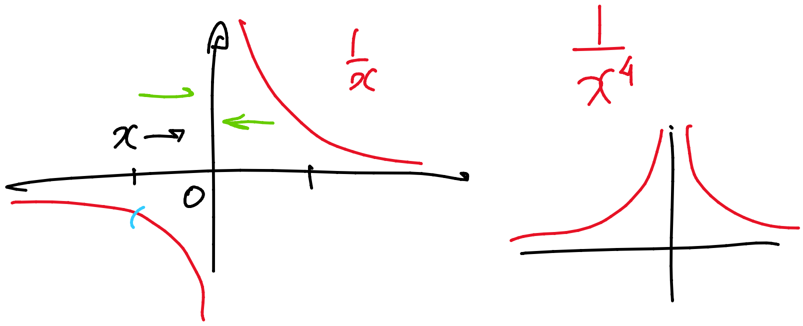
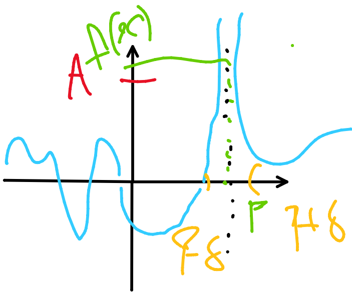
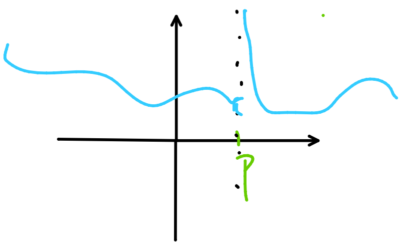
Limites infinitos e derivada - parte 1 (T4 e T5)



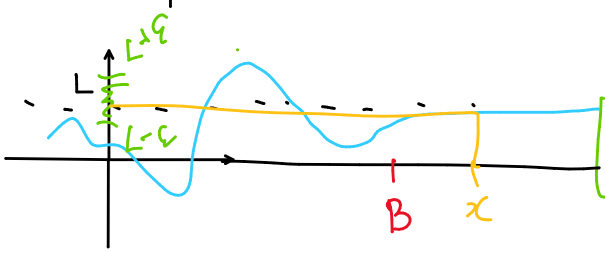
Limites infinitos e limites no infinito



$\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = +\infty}$ $\Leftrightarrow$ dado $A>0$, $\exists\, \delta>0$ tq. $0<|x-p|<\delta$ $\Rightarrow f(x)>A$



$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$ $\Leftrightarrow$ dado $A>0$, $\exists\, \delta>0$ tq. $p<x<p+\delta$ $\Rightarrow f(x)>A$



$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$ $\Leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\, B>0$ tq. $x>B \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

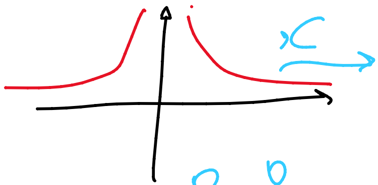
Limites no infinito

<u>Definição</u>: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $x > A$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

<u>Definição</u>: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que $x < B$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Exercício: Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$



b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2+2x+4} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x+1}{3x^3+2x+4} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(3+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(3+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$

Limites infinitos

Definição: $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ dado $C > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-p| < \delta$ $\Rightarrow f(x) > C$.

Definição: $\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ dado $C > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $p < x < p+\delta$ $\Rightarrow f(x) > C$.

Definição: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ dado $C < 0$, existe $D > 0$ tal que $x > D$ $\Rightarrow$ f$(x) < C$.

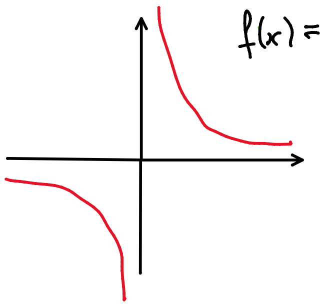
d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+x+1}{3x^2-2x+4} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = +\infty$

Observação: $(\infty. \infty)$ NÃO é uma indeterminada, pois

$\lim_{x\to p^+} \underbrace{f(x)}_{+\infty}\overbrace{g(x)}^{0} = 0\cdot\infty$ (indeterminada!)

$\lim_{x\to p^+} \underbrace{f(x)}_{+\infty}\overbrace{g(x)}^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to p^+} \underbrace{f(x)}_{+\infty}\overbrace{g(x)}^{-\infty} = -\infty$



$f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

Exercício: Defina dos demais limites.

Observação: Valem as "regras de sinais"

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$ significa $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x)\,g(x) = +\infty$

$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(+\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Proposição: Também valem:

$$L.(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se } L > 0 \\ -\infty \text{ se } L < 0 \end{cases}$$

$$L.(-\infty) = \begin{cases} -\infty \text{ se } L > 0 \\ +\infty \text{ se } L < 0 \end{cases}$$

Observação: São indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$

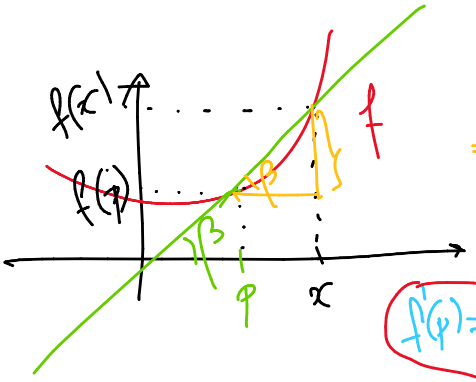
Observação: $0.\infty$ é uma indeterminada, pois

$$\lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{\cancel{x}}.\underset{0}{\frac{1}{x}} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{\cancel{x}^2}.\underset{0}{\frac{1}{x}} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{\cancel{x}}.\underset{0}{\frac{1}{x^2}} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0} \overset{0}{\cancel{x}^3}.\underset{+\infty}{\frac{1}{x^4}} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to0} \frac{1}{x} \quad \text{(não existe)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 0.x = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

Derivadas



$\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} = tg\,\beta = m$

$y - f(p) = m(x-p)$

$$\boxed{f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}}$$

$\boxed{y - f(p) = f'(p)(x-p)}$ equação da reta tg ao G_f no ponto $(p, f(p))$

$f'(p)$ = derivada de f em p.

Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $p \in A$, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em p se o limite

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

existe e é finito. Denotamos esse número por $f'(p)$.

Observação: Derivada NÃO É reta tangente.

Definição: Dizemos que f é derivável (ou diferenciável) se f for derivável em p, $\forall p \in D_f$.

Exemplos: Calcule as seguintes derivadas de f no ponto x:

a) $f(x) = k$ $\quad p \in D_f \quad f'(p) = \lim_{x\to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{x\to p} \dfrac{\overbrace{k-k}^{=0}}{x-p} = \lim_{x\to p} 0 = 0 \Rightarrow f'(p) = 0, \forall p$

b) $f(x) = x$ $\quad p \in D_f \quad f'(p) = \lim_{x\to p} \dfrac{\cancel{x-p}}{\cancel{x-p}} = \lim_{x\to p} 1 = 1 \Rightarrow f'(x) = 1, \forall x$

c) $f(x) = x^n$ $\quad p \in D_f \quad f'(p) = \lim_{x\to p} \dfrac{x^n - p^n}{x-p} \overset{0/0}{=}$

$p^{n-2}\cdot p = p^{n-1}$

$$= \lim_{x\to p} \frac{\cancel{(x-p)}\,(x^{n-1} + x^{n-2}p + x^{n-3}p^2 + \dots + x^2p^{n-3} + xp^{n-2} + p^{n-1})}{\cancel{(x-p)}} = np^{n-1}$$

$\Rightarrow f(x) = x^n \Rightarrow f'(p) = np^{n-1}$