Limite - parte 4 (T4)

Limite da função composta

Proposição: Sejam duas funções $g(u)$ e $u = f(x)$, onde g é contínua em a, tais que $F(x) = g(u)$, onde $u = f(x), x \in D_f$
$\lim_{x\to p} f(x) = a$ e que $\lim_{u\to a} g(u) = L$. Então
$\lim_{x\to p} F(x) = \lim_{u\to a} g(u) = L$.

$$\lim_{x\to p} g(\overset{a}{\cancel{f(x)}}) = L$$

Exemplo: Calcule

$a)\ \lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+3x-5} = \sqrt{4+6-5} = \sqrt{5}$

$b)\ \lim_{x\to 3} (2x^2-3x+1)^2 = (18-9+1)^2 = 10^2 = 100$

Limite: Mudança de variável

$$c)\ \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3-2+1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1} \frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)} = \frac{1}{3}$$

$u = \sqrt[3]{x+2}$

$u^3 = x+2 \Rightarrow x = u^3 - 2$

Teorema do confronto: Sejam f, g e h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

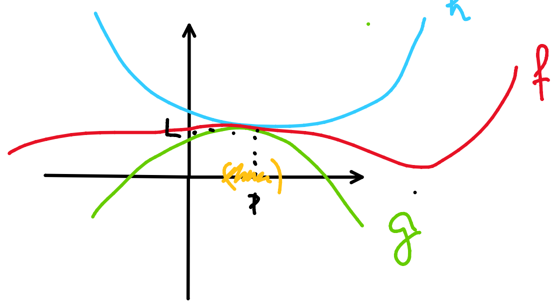
$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

para $0 < |x-p| < r$. Nessas condições, se

$$\lim_{x\to p} g(x) = L = \lim_{x\to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x\to p} f(x) = L.$$



Demonstração:

$\lim_{x\to p} g(x)=L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta_1>0$ | q. $0<|x-p|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)-L|<\varepsilon$

$\lim_{x\to p} h(x)=L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta_2>0$ tq $0<|x-p|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$

$\lim_{x\to p} f(x)=?$ Seja $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$|g(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$

$|h(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$

$L-\varepsilon<g(x)\le f(x)\le h(x)<L+\varepsilon$ $\quad L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x)=L$ ∎

Exercícios:

1. Seja f uma função definida em ℝ tal que para todo $x \neq 1$, $-x^2+3x \le f(x) < \frac{x^2-1}{x-1}$.

   Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

2 $\qquad$ 2

$\lim_{x\to 1}(-x^2+3x) = -1+3=2$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

Pelo teorema do confronto, $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe e $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

2. Seja f definida em ℝ e tal que, para todo x, $|f(x)-3| \le 2|x-1|$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

$-2|x-1| \le |f(x)-3| \le 2|x-1| \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3$

0 $\qquad$ 0 $\qquad$ 0

$$\lim_{x\to p} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)|=0$$

$$0 \leqslant |f(x)-3| \leqslant 2\,|x-1|$$

$$\text{T.C.)} \Rightarrow \lim_{x\to 1} |f(x)-3| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)-3 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3$$

3. Suponha que, para todo x, $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.

$$0 = \frac{0}{|x|} \leq \frac{|g(x)|}{|x|} \leq \frac{x^4}{|x|} = \frac{|x^4|}{|x|} = \left|\frac{x^4}{x}\right| = |x^3|$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0} |x^3| = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{T.C.}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left|\frac{g(x)}{x}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$$

Def: Dizemos que g é limitada se $\exists\, M>0$ tq. $|g(x)| \leq M,\ \forall x$

Corolário: Sejam f e g duas funções com o mesmo domínio A tais que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in A$, onde $M > 0$ é um número real. Então
$$\lim_{x\to p} f(x).g(x) = 0.$$

Demonstração:

$$-M|f(x)| \leq |f(x)|g(x) \leq |f(x)|M \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to p} -M|f(x)| = -M.0 = 0 \\ \lim_{x\to p} M|f(x)| = M.0 = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{T.C.}}{\Rightarrow} \lim_{x\to p} |f(x)|g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to p} \big||f(x)|.g(x)\big| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} \big||f(x)|\big|.|g(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} |f(x)|.|g(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to p} |f(x).g(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$$

4. *a*) Verifique que $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\, \dfrac{1}{x}$ não existe. ok

b) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 0} x \,\text{sen}\, \dfrac{1}{x}$. (Justifique.)

b) $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{0} \cdot \underbrace{\text{sen}(1/x)}_{\text{limitada}} \overset{\text{T.C.}}{=} 0$

$|\text{sen}(1/x)| \leq 1$

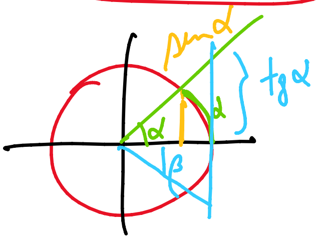
<u>Proposição</u>: Sejam f e g duas funções contínuas em p. Também são contínuas em p:

a) $f + g$
b) $f . g$
c) $k . f$ com $k \in \mathbb{R}$
d) $\dfrac{f}{g}$, com $g(p) \neq 0$

$tg(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

<u>Proposição</u>: A composta de duas funções contínuas também é uma função contínua.

<u>Exercício</u>: Mostre que existe $r > 0$ tal que, para todo x, com $|x| < r$, temos que $|\text{sen}\,(x)| < |x|$.



$0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x < x < tg\, x$

$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac < bc$

$\Rightarrow$ $|\text{sen}\, x| \; 2 \; |\cos(\ )| \leq 1 \; 2 \; |\text{sen}\, x|$

<u>Exercício</u>: Mostre $|\text{sen}\,(x) - \text{sen}\,(p)| < |x - p|$ para $|x - p| < r$.

$|\text{sen}\, x - \text{sen}\, p| = \left|2\, \text{sen}\left(\dfrac{x-p}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x+p}{2}\right)\right| = 2 \cdot \left|\text{sen}\left(\dfrac{x-p}{2}\right)\right| \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\dfrac{x+p}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \leq$

$\leq 2 \left|\text{sen}\left(\dfrac{x-p}{2}\right)\right| \cdot 1 < \cancel{2} \left|\dfrac{x-p}{\cancel{2}}\right| = |x - p|$

Teorema: As funções sen e cos são contínuas.

f é contínua em $p \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$

$0 \le |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| < |x-p|$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to p} 0 = 0 \\ \lim_{x\to p}|x-p| = 0\end{array}\right\} \overset{T.C.}{\Rightarrow} \lim_{x\to p} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to p} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} p$$

$\Rightarrow$ sen é cont em p.

O Limite Fundamental

Observação: os ângulos serão sempre medidos em radianos.

Proposição (limite fundamental): $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

$$1 = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$0 < 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1\end{array}\right\} \overset{T.C.}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$-\pi/2 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x) \Rightarrow -\operatorname{sen} x < -x < -\operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{sen} x > x > \operatorname{tg} x$$

(exercício)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \therefore \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi} = 1}$$

$$\lim_{x\to 0} 5\,\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 5.1 = 5$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen}x}{5x} = \frac{3}{5}.1 = \frac{3}{5}$$

Exercício: Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \boxed{\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2} \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

—— // ——

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} \; \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\,\frac{\operatorname{tg}(3x)}{3x} = 3.1 = 3$$