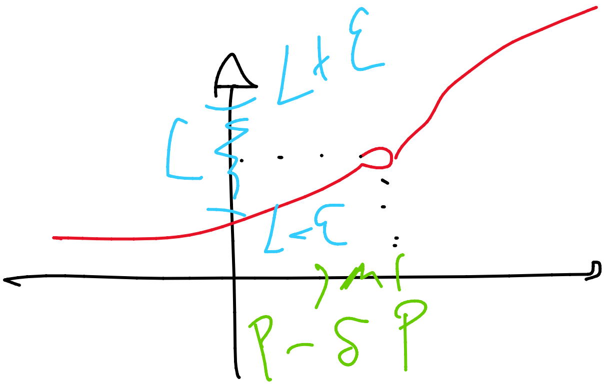
Limite e continuidade - parte 3 (T4 e T5)

Limite Laterais



$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q. $0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

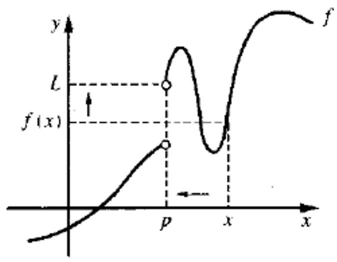
$\lim_{x\to p^+} f(x) = L \iff$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q. $p < x < p+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x\to p^-} f(x) = L \iff$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q. $p-\delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in A$.
$\lim_{x\to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

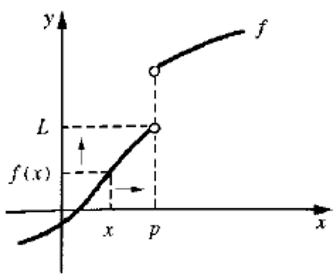
Esse limite é chamado de *limite lateral à direita de f*.



Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in A$.
$\lim_{x\to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esse limite é chamado de *limite lateral à esquerda de f*.



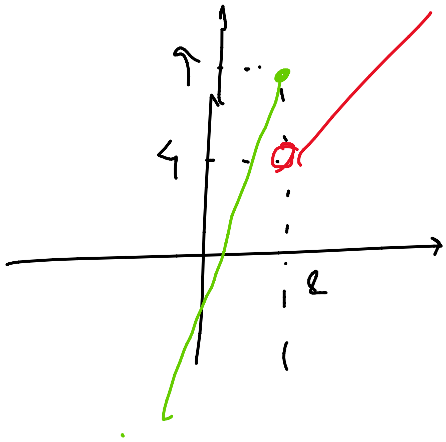
Teorema. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então,

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \\ \text{e } \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Exercício: Verifique a existência do limite $\lim_{x\to 2} f(x)$, onde

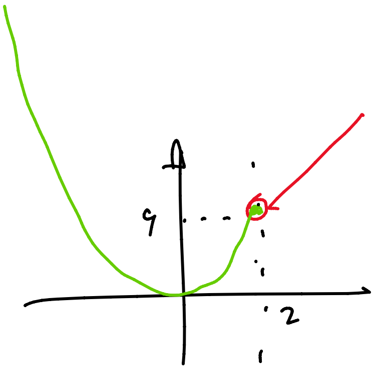
a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{, se } x > 2 \\ 5x-1 & \text{, se } x < 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \\ x<2 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (5x-1) = 9 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$



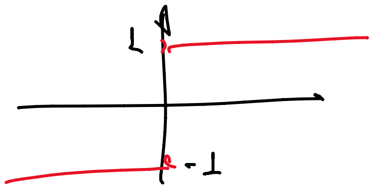
b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{, se } x > 2 \\ x^2 & \text{, se } x < 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$



$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x>0 \\ -\frac{x}{x}, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

<u>Exercício</u>: Calcule os seguintes limites:



$a)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

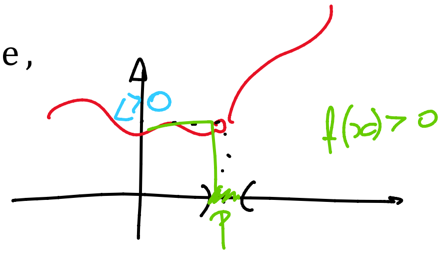
$b)\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x} = \ ?$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$, pois $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

Obs. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 3 \\ 2x+4, & x < 3 \end{cases}$ $\quad f(3) = 4 \quad \cancel{f(3) = 10}$

Proposição: (lei da conservação do sinal). Suponha que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, com $L > 0$. Prove que existe um $\delta > 0$ tal que,
$\forall x \in D_f, \quad p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$

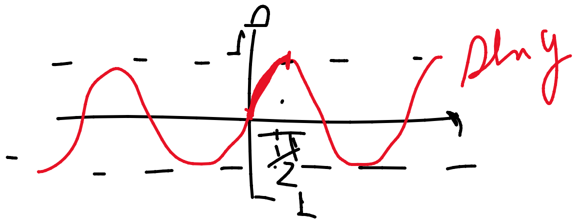


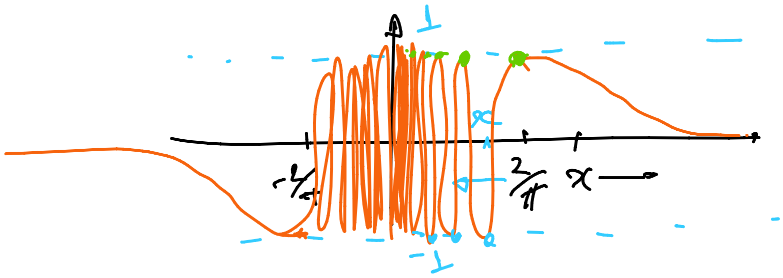
Observações

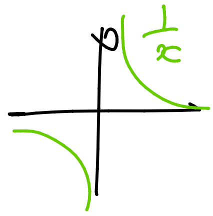
1. Se $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to p^-} f(x)$ existirem e forem *diferentes*, então $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não existirá.
2. Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f e se, em p, um dos limites laterais não existir, então $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não existirá.
3. Se existirem reais $r > 0$ e b tais que $]p, b[\subset D_f$ e $]p - r, p[\cap D_f = \phi$, então $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p^+} f(x)$, desde que o limite lateral à direita exista. Se ocorrer $]b, p[\subset D_f$ e $]p, p + r[\cap D_f = \phi$, então $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.

$D_f = \mathbb{R}_+ \qquad \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$

Ex: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$







$$a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow b_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$f(b_k) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

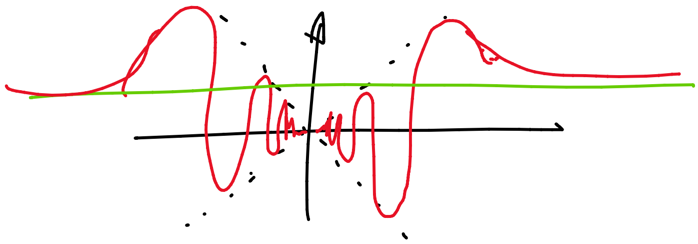
$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ (k \in \mathbb{N})}} f(b_k) = \lim_{k \to +\infty} 1 = 1$$

$c_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad d_k = \frac{1}{c_k}$

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ (k \in \mathbb{N})}} f(d_k) = \lim_{k \to +\infty} (-1) = -1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

Obs: $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

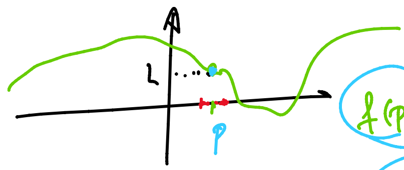


Continuidade de uma função

$p \in D_f$ $\qquad$ $p \in \mathbb{R}$

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad A = D_f$

$p \in A$



$f(p) = L$

$= \lim_{x \to p} f(x)$

Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in A$.
Dizemos que f é uma função contínua em $p \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

$L = f(p)$

Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in A$.
Dizemos que f é uma função contínua $\Leftrightarrow$ f for contínua em $x, \forall x \in A$

Exercício: Mostre que $f(x) = k \in \mathbb{R}$ é contínua.

a) $D_f = \mathbb{R}$. Seja $p \in D_f$

dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$? t.q. $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

$0 = |k - k| < \varepsilon$

Basta considerar $\forall \delta > 0$

b) $f(x) = x$

$D_f = \mathbb{R}$, Seja $p \in D_f$

dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$? t.q. $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

$|x - p| < \varepsilon$

Basta considerar $\delta = \varepsilon$

Observação: São funções contínuas:

a) Funções polinomiais
b) Funções racionais
c) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ raízes n-ésimas

Limite da função composta

Proposição: Sejam duas funções $g(u)$ e $u = f(x)$, onde g é contínua em a, tais que $F(x) = g(u)$, onde $u = f(x), x \in D_f$
$\lim_{x\to p} f(x) = a \;\; e\; que \;\; \lim_{u\to a} g(u) = L. Então$
$\lim_{x\to p} F(x) = \lim_{u\to a} g(u) = L$.

$$F(x) = g(u) = g(f(x))$$

$$\lim_{x\to p} F(x) = \lim_{x\to p} g(f(x)) = g(a)$$

contínua em a

Exemplo: Calcule
$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2 + 3x - 5}.$ $= \sqrt{4+6-5} = \sqrt{5}$