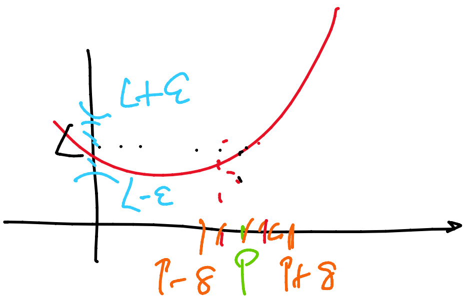
Limites - parte 2 (T4 e T5)

<u>Definição</u>: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in \mathbb{R}$.
$\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$0<|x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



<u>Exercício</u>: Prove que $\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to p}|f(x)| = 0$

<u>Resolução</u>:

$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ t.q. $0<|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$

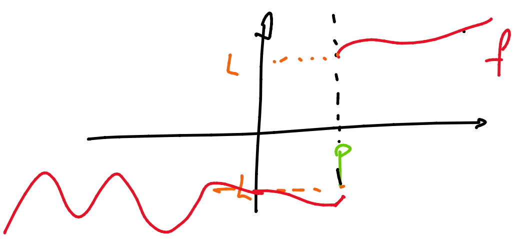
$\Leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ t.q. $0<|x-p|<\delta \Rightarrow ||f(x)|-0|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0$

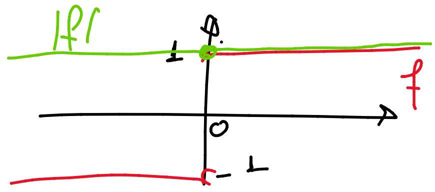
Obs: $|f(x)-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow ||f(x)||<\varepsilon \Leftrightarrow ||f(x)|-0|<\varepsilon$

<u>Obs</u>: $\lim_{x\to p} f(x) = L \overset{OK}{\Rightarrow} \lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$

$\lim_{x\to p} f(x) = L \cancel{\Leftarrow} \lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$?



$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ -\frac{x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| = 1, \ \forall x \neq 0$



$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 1$, porém $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

Exercício: Prove que $\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(p+h) = L$

$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq. $0 < |\underbrace{x-p}_{h}| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq. $0 < |h - 0| < \delta \Rightarrow |f(p+h) - L| < \varepsilon$

$h = x - p \Rightarrow x = p + h$

$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(p+h) = L$

Ex: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x + \pi) = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + h\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$h = x - \pi/2$

$h \to 0$

$\frac{3\pi}{2} + h = x - \pi/2 + \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} + h = x + \pi$

Proposição: Seja $k \in \mathbb{R}$ e sejam f e g duas funções tais que $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$, com $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, então valem:

$a)$ $\lim_{x\to p} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

$b)$ $\lim_{x\to p} f(x).g(x) = L_1.L_2$

$c)$ $\lim_{x\to p} kf(x) = kL_1$

$d)$ $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, com $L_2 \neq 0$

Exemplo: Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim_{x\to 2}(x^2+x^3) = 4+8=12$

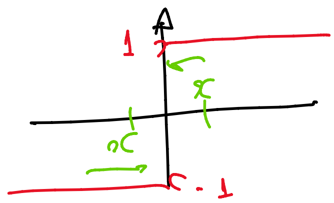
$b)\ \lim_{x\to 0}(5x^2+\cos(x)) = 0+1=1$

$5\cdot 0=0$

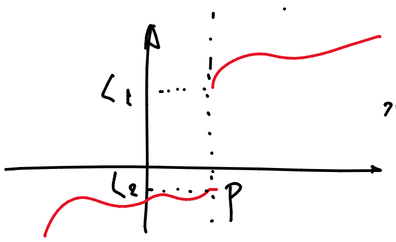
$c)\ \lim_{x\to -1}\dfrac{3x-x^2}{\sqrt{2+x}+2x} = \dfrac{-3-1}{1-2} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

$d)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x} = ?$

não existe $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ pois: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = -1$



Limite Laterais



$\lim_{x\to p^+} f(x) = L_1$

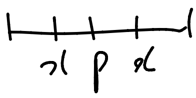
$\lim_{x\to p^-} f(x) = L_2$

$\lim_{x\to p^+} f(x) = L \iff$ dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tq

$\cancel{0<|x-p|<\delta} \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$|x-p|<\delta \iff -\delta < x-p < \delta$

$p-\delta < x < p+\delta$

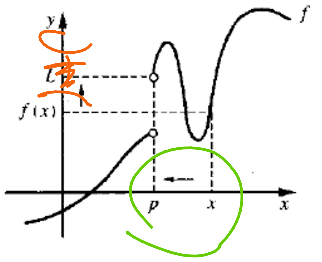


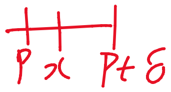
$p < x < p+\delta$

Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in A$.
$\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esse limite é chamado de *limite lateral à direita de f.*





$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

Definição: Sejam $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in A$.
$\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esse limite é chamado de *limite lateral à esquerda de f.*