# Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ - parte 2 (T4)

***Teorema.*** Existe um único par de funções definidas em $\mathbb{R}$, indicadas por sen e cos, satisfazendo as propriedades:

(1) $\operatorname{sen} 0 = 0$

(2) $\cos 0 = 1$

(3) Quaisquer que sejam os reais $a$ e $b$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

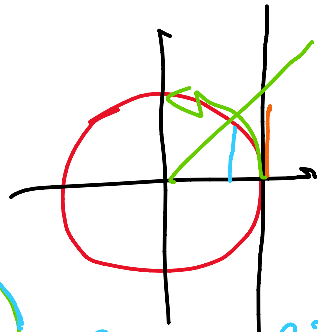
(4) Quaisquer que sejam os reais $a$ e $b$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

(5) Existe $r > 0$ tal que

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \left( \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

para $0 < x < r$.




$2\pi \rightarrow 2\pi r$

$\alpha \rightarrow x$

$\alpha \cancel{2\pi} r = \cancel{2\pi} x$

Seja $f$ uma função definida em $\mathbb{R}$. Dizemos que $f$ é uma *função par* se, para todo $x$,

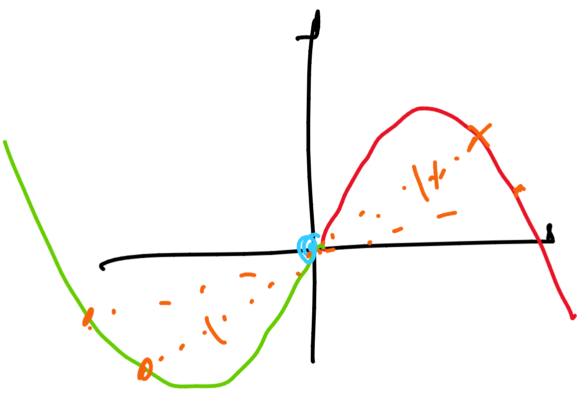
$$f(-x) = f(x).$$

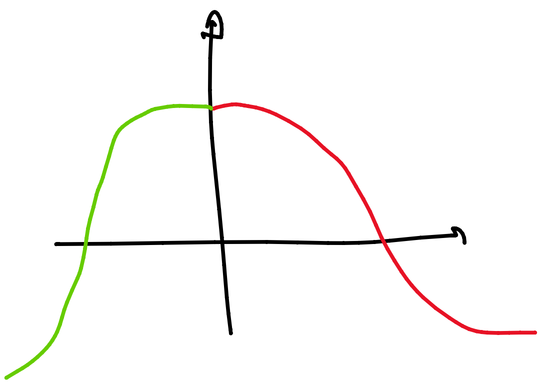
Dizemos, por outro lado, que $f$ é uma *função ímpar* se, para todo $x$,

$$f(-x) = -f(x).$$

**EXEMPLO 1.**

$a)$ sen é uma função ímpar. $\qquad$ $b)$ cos é uma função par.





**EXEMPLO 2.** quaisquer que sejam os reais $a$ e $b$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

e

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a.$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a$$
$$= \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p = ?$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}(a+b)}_{x} - \operatorname{sen}\overbrace{(a-b)}^{p} = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a - (\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a)$$
$$= 2 \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} b \cos a}$$

$$\begin{cases} a+b = x \\ a-b = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = x+p \\ 2b = x-p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+p}{2} \\ b = \frac{x-p}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)}$$

**EXEMPLO 3.** $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$

**EXEMPLO 4.** $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ e $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$+\begin{array}{l} \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \end{array}$$
$$\cos(2x) + 1 = 2\cos^2 x + 0 \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}}$$

**EXEMPLO 5.** $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $D_f \cap D_g$ seja diferente do vazio. Definimos:

*a)* A função $f + g$ dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

denomina-se *soma* de $f$ e $g$. O domínio de $f + g$ é $D_f \cap D_g$. Observe que $f + g$ é uma notação para indicar a função dada por $y = f(x) + g(x)$.

*b)* A função $f \cdot g$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

denomina-se *produto* de $f$ e $g$. O domínio de $f \cdot g$ é $D_f \cap D_g$.

*c)* A função $\dfrac{f}{g}$ dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

denomina-se *quociente* de $f$ e $g$. O domínio de $\dfrac{f}{g}$ é $\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

*d)* A função $kf$, $k$ constante, dada por

$$(kf)(x) = kf(x)$$

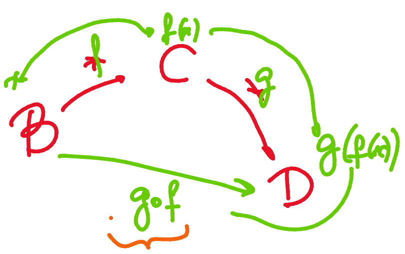
é o *produto de $f$ pela constante $k$*; $D_{kf} = D_f$.

**Definição** (*de função composta*). Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $\operatorname{Im} f \subset D_g$. A função dada por

$$y = g(f(x)),\ x \in D_f,$$

denomina-se *função composta* de $g$ e $f$. É usual a notação $g \circ f$ para indicar a composta de $g$ e $f$.

$\operatorname{Im}_f \subset D_g$




$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 - 1 \\ g(y) &= \sqrt{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 - 1 = y - 1 \\ \cancel{(g \circ f)} \end{cases}$$

$$\underset{]-\infty,-1]}{\operatorname{Im}_f} \not\subset \underset{\mathbb{R}_+}{D_g} \quad \Bigg| \quad \underset{\mathbb{R}_+}{\operatorname{Im}_g} \subset \underset{\mathbb{R}}{D_f}$$

**Definição** (*de igualdade de funções*). Sejam as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : A' \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $f$ é *igual* a $g$, e escrevemos $f = g$, se os domínios de $f$ e $g$ forem iguais, $A = A'$, e se, para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Ex: a) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

b) $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

c) $\operatorname{cotg} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$ $\operatorname{sen} x \neq 0$, $\cos x \neq 0$

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ $\operatorname{sen} x \neq 0$