Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ - parte 2 (T4 e T5)

Observação: salvo menção contrário, todos os nossos conjuntos serão subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definição: Definimos duas operações em $\mathbb{R}$ denominadas adição e multiplicação que satisfazem as seguintes propriedades:

Dados para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

$x - y = x + (-y)$

(A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associativa)

(A2) $x+y = y+x$ (comutativa)

(A3) $x+0 = x$ (elemento neutro)

(A4) para cada x existe um y tal que $x + y = 0$ e y é denotado por $-x$ (elemento oposto)

(M1) $(xy)z = x(yz)$ (associativa)

(M2) $xy = yx$ (comutativa)

(M3) $1x = x$ (elemento neutro)

(M4) para cada $x \neq 0$ existe um y tal que $xy = 1$ e y é denotado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ (elemento inverso)

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

(D) $x(y+z) = xy + xz$ (distributiva)

Observação: Existem conjuntos com operações que não satisfazem todas as propriedades anteriores.

Exemplos: Em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ = espaço das matrizes de ordem 2, o produto não é comutativo.

Observação: $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado, ou seja, dados dois números $x, y \in \mathbb{R}$, ou $x \geq y$ ou $x \leq y$.

Observação: Nem todo conjunto é ordenado.

Exemplos: $\mathbb{C}$ e $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ são conjuntos não ordenados.

<u>Propriedades</u>: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

Reflexiva

(O1) $$x \leqslant x.$$

Anti-simétrica

(O2) $$x \leqslant y \quad \text{e} \quad y \leqslant x \Rightarrow x = y$$

(leia-se: se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, então $x = y$ ou $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implica $x = y$).

Transitiva

(O3) $$x \leqslant y \quad \text{e} \quad y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z.$$

Compatibilidade da ordem com a adição

(OA) $$x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z.$$

(*Somando-se a ambos os membros de uma desigualdade um mesmo número, o sentido da desigualdade se mantém.*)

Compatibilidade da ordem com a multiplicação

(OM) $$x \leqslant y \quad \text{e} \quad 0 \leqslant z \Rightarrow xz \leqslant yz.$$

(*Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sentido da desigualdade se mantém.*)

EXEMPLO 1. Quaisquer que sejam os reais x, y, z, w

$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ z \leqslant w \end{array}\right\} \Rightarrow x + z \leqslant y + w.$$

(*Somando-se membro a membro desigualdades de mesmo sentido, obtém-se outra de mesmo sentido.*)

$x \leq y$

$x+z \leq y+z$

$z \leq w$

$y+z \leq y+w$

$$\left.\begin{array}{l} x+z \leq y+z \\ y+z \leq y+w \end{array}\right\} \Rightarrow x+z \leq y+w$$

EXEMPLO 2. (Lei do cancelamento.) Quaisquer que sejam os reais x, y, z

$$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

$(x+z)+(-z) = (y+z)+(-z)$

$x+(z+(-z)) = y+(z+(-z))$

$x+0 = y+0$

$x = y$

EXEMPLO 3. Quaisquer que sejam os reais x, y, z, w

$$\text{e}\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leqslant yw.$$

(Multiplicando-se membro a membro desigualdades de mesmo sentido e de números positivos, obtém-se desigualdade de mesmo sentido.)

<u>Cuidado</u>: os números têm que ser positivos, por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} -2 \leq 3 \\ -7 \leq 4 \end{array}\right\} \not\Rightarrow 14 = (-2).(-7) \leq 3.4 = 12$$

<u>Propriedades</u>: Dados $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, temos:

a) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z.$

b) $z > 0 \Leftrightarrow z^{-1} > 0.$

c) $z > 0 \Leftrightarrow -z < 0.$

d) se $z > 0$, $x < y \Leftrightarrow xz < yz.$

e) se $z < 0$, $x < y \Leftrightarrow xz > yz.$

$2 < 3$

$2(-4) < 3(-4)$

$\cancel{-8 < -12}$

(Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo, o sentido da desigualdade muda.)

f) $$\text{e}\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} \Rightarrow xz < yw.$$

g) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$

h) (*Tricotomia.*) Uma e somente uma das condições abaixo se verifica:

$$x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y.$$

i) (*Anulamento do produto.*)

$$xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

(Um produto é nulo se e somente se um dos fatores for nulo.)

$x^2 - 1 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

$-$	$+$	$+$	$x+1$
$-$	$-$	$+$	$x-1$
$+$	-1 $-$	1 $+$	

EXEMPLO 9. Resolva a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5.$ $\quad x \neq -2$

Errado

$3x - 1 \geq 5(x+2)$

$3x - 1 \geq 5x + 10$

$2x \leq -11$

$x \leq \frac{-11}{2}$

Nota: zero

$\frac{3x-1}{x+2} \geq 5 \frac{(x+2)}{(x+2)}$

$\frac{3x-1}{x+2} \geq \frac{5x+10}{x+2}$

$\frac{3x-1}{x+2} + \left(\frac{-5x-10}{x+2}\right) \geq 0$

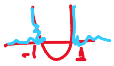
$\boxed{\frac{-2x-11}{x+2} \geq 0}$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{11}{2} \leq x < -2\}$

$+$	$-$	$-$	$(-2x-11)$
$-$	$-$	$+$	$(x+2)$
$-$ $-\frac{11}{2}$	$+$	-2 $-$	

Ex: $x^2-1 \geq 0$

$(x+1)(x-1) \geq 0$



$-$	$+$	$+$	$x+1$
$-$	$-$	$+$	$x-1$
$+$ -1	$-$	1 $+$	$(x+1)(x-1)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

Módulo de um número real

Seja x um número real; definimos o *módulo* (ou *valor absoluto*) de x por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

De acordo com a definição acima, para todo x, $|x| \geq 0$, isto é, o módulo de um número real é sempre positivo.

EXEMPLO 1.

a) $|5| = 5.$ *b)* $|-3| = -(-3) = 3.$

EXEMPLO 2. Mostre que, para todo x real,

$$|x|^2 = x^2.$$

$$|x|^2 = \begin{cases} (x)^2, & x \geq 0 \\ (-x)^2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases} = x^2, \ \forall x$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{|x|^2} = \sqrt{x^2} \\ \quad \parallel \\ \ \ |x| \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\frac{3x^4}{x} = 3.\frac{x(x.x)}{x} = 3x.1 = 3x$

EXEMPLO 3. Suponha $a > 0$. Resolva a equação

$$|x| = a.$$

$$\underset{\displaystyle \overset{\parallel}{a}}{|x|} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a, & x \geq a \\ -x = a, & x < a \end{cases}$$

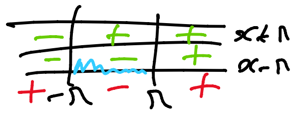
$\Rightarrow x = a$ ou $x = -a$

EXEMPLO 5. Suponha $r > 0$. Mostre que

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r.$$

$$0 \leq |x| < r \Leftrightarrow |x|^2 < r^2 \Leftrightarrow x^2 < r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - r^2 < 0 \Leftrightarrow (x+r)(x-r) < 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow -r < x < r$$

EXEMPLO 7. Elimine o módulo em

$$|x - p| < r \; (r > 0).$$

$$|x-p| < r \Leftrightarrow -r < x-p < r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p-r < x < p+r$$

$$|x-p| < r$$

y

$$-r < y < r$$

$$p-r < x-p+p < r+p$$

EXEMPLO 8. Mostre que quaisquer que sejam os reais x e y

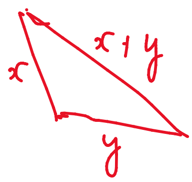
$$|xy| = |x||y|.$$

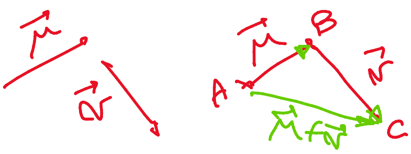
(O módulo de um produto é igual ao produto dos módulos dos fatores.)

EXEMPLO 9. *(Desigualdade triangular.)* Quaisquer que sejam os reais x e y

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

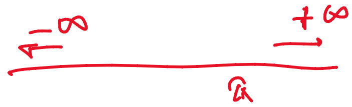
(O módulo de uma soma é menor ou igual à soma dos módulos das parcelas.)





Intervalo, distância e módulo

Definição: $+\infty$ = "mais infinito"
$-\infty$ = "menos infinito"



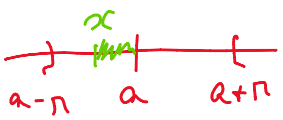
Observação: ∞ é apenas um símbolo, não é um número.

Definição: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Observação: Utilizaremos intervalos, distâncias e módulos como sinônimos.
Por exemplo, dados 3 números $x, a, r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, temos:

$$x \in]a-r, a+r[\iff \mathrm{d}(x, a) < r \iff |x - a| < r$$



$$d(x,a) = |x-a|$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 2 \iff \frac{x-2}{x-1} < \frac{1}{2}$$

Potência de um número real

Sejam $a > 0$ um real e $r = \dfrac{m}{n}$, $n > 0$, um racional. Definimos

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Tendo em vista a propriedade (2) das raízes, segue que tal definição não depende da particular fração $\dfrac{m}{n}$, $n > 0$, que tomamos como representante do racional r.

EXEMPLO

a) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ *b)* $5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}$ ■

Sejam $a > 0$ e $b > 0$ dois reais quaisquer e r, s dois racionais quaisquer. Das propriedades das potências com expoentes inteiros e das raízes seguem as seguintes propriedades das potências com expoentes racionais e cujas demonstrações são deixadas como exercícios:

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

(2) $(a^r)^s = a^{rs}$.

(3) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

(4) $(ab)^r = a^r b^r$.

(5) Se $a > 1$ e $r < s$, então $a^r < a^s$.

(6) Se $0 < a < 1$ e $r < s$, então $a^r > a^s$.