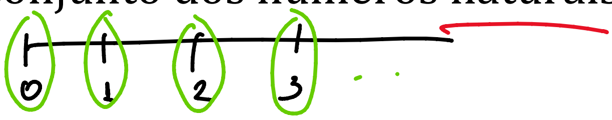
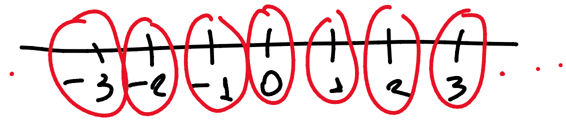
Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ - parte 1 (T5)

<u>Observação</u>: Todos trechos de textos e exemplos ao longo de todo o curso serão extraídos do livro: Um Curso de Cálculo - vol.01 - Hamilton Guidorizzi.

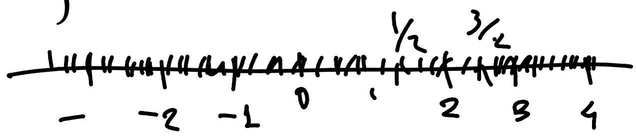
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$ = conjunto dos números naturais

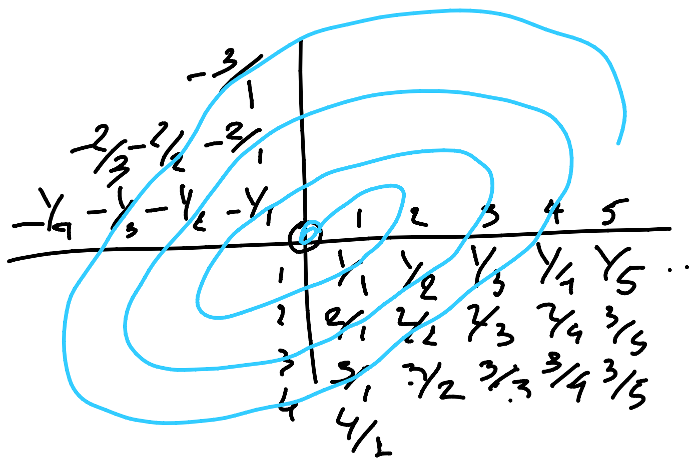


$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, , \dots\}$ = conjunto dos números inteiros



$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ = conjunto dos números racionais





<u>Exercício</u>: Mostre que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ tq. $\boxed{\sqrt{2} = p/q}$, $q \neq 0$

Podemos supor que $mdc(p,q) = 1$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}q)^2 = (p)^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$$p = \left(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdots p_m^{n_m}\right)^2$$

$$= p_1^{2n_1}\, p_2^{2n_2} \cdots p_m^{2n_m}$$

Pelo T.F.A, chegamos num absurdo.

ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$?

<u>Observação</u>: Todo número escrito na forma decimal e que tenha uma dízima periódica é um número racional. Veja o exemplo abaixo:

Obs: $n \in \mathbb{Q} \Rightarrow n = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

$$n = 2,15393939\ldots$$

$$100n = 215,393939\ldots$$

$$10000n = 21539,3939\ldots$$

$$10000n - 100n = 21539 - 215$$

$$9900n = 21324$$

$$n = \frac{21324}{9900}$$

Observação: O conjunto dos números reais não é enumerável.

$$
\begin{array}{l|llllll}
0 & \cancel{r_{11}} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & \ldots \\
 & r_{21} & \cancel{r_{22}} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & \ldots \\
 & r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & \ldots \\
 & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$\neq 9$

$s_{11} \neq r_{11}$

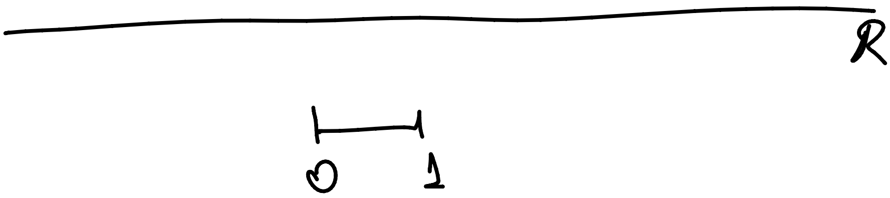
$s_{22} \neq r_{22}$

$\neq 9$

$0, s_{11} s_{22} s_{33}$

$1 = 0,999999999\ldots$

$0,0839999$



Observação: A construção do conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é bastante técnica e não é o objetivo deste curso. Assumiremos a existência deste conjunto.