SUI PASSAGGI AL LIMITE NEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

In: « *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* », 1930, vol. LXIII, fasc. 2-5,
pp. 1-12.

REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti* — Vol. LXIII - Fasc. II-V — 1930.

SUI PASSAGGI AL LIMITE NEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Nota del dott. BRUNO DE FINETTI

(Adunanza del 30 gennaio 1930)

Sunto. — Se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ è una successione di variabili casuali che tendono a una variabile casuale limite X, non si può concludere, contrariamente a quanto generalmente ammesso, che la legge di probabilità di X debba essere la legge limite della legge di X_n per $n \to \infty$. Ciò sussiste però se la convergenza è *uniforme* ed anche sotto una condizione meno restrittiva che diciamo della *convergenza stocasticamente uniforme.*

1. Richiamiamo brevemente il concetto di *variabile casuale*. Se X è una grandezza il cui valore ci è incognito, non sappiamo in generale (1) se è vero o falso che la X cada in un dato intervallo (ξ_1, ξ_2): l'ipotesi che ciò avvenga costituisce allora un evento che potrà avere una certa probabilità p. Esempi facili e ben noti: un errore accidentale X, soggetto alla legge normale ridotta, che ha la probabilità

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

di appartenere a un dato intervallo (ξ_1, ξ_2); la frequenza X di « testa » su n prove giocando a testa e croce, che può assumere i valori $\frac{h}{n}$ $(h = 0, 1, \ldots, n)$ con probabilità $\frac{1}{2^n}\binom{n}{h}$; il guadagno X di una compagnia d'assicurazioni sulla vita, la cui legge di probabilità è determinata conoscendo la tavola di mortalità.

(1) A meno cioè che i valori possibili per X siano tutti compresi in (ξ_1, ξ_2), o tutti esclusi.

La probabilità che una data variabile casuale X abbia valore minore di un numero generico ξ è una funzione reale ovviamente non decrescente di ξ, compresa sempre tra 0 e 1; essa avrà quindi tutt'al più un' infinità numerabile di punti di discontinuità, nei quali avrà un incremento finito. Indichiamo con $\Phi(\xi)$ la funzione che rappresenta la probabilità che sia $X < \xi$, quando ξ non è uno di tali punti di discontinuità, e che in questi punti è la semisomma dei limiti destro e sinistro. La Φ si dice *funzione di ripartizione* o anche *legge di probabilità* della variabile casuale X. La probabilità p che X appartenga a un intervallo (ξ_1, ξ_2) è allora ovviamente

$$p = \Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1),$$

a meno che ξ_1 o ξ_2 non siano punti di discontinuità, nel qual caso *nulla si può dire* (se non, naturalmente, che è

$$\Phi(\xi_2 + \varepsilon) - \Phi(\xi_1 - \varepsilon) \geqq p$$

se $\varepsilon > 0$ e $\leqq p$ se $\varepsilon < 0$).

2. Delle opinioni molto sempliciste comunemente ammesse ci condurrebbero invece, mediante un passaggio al limite, a una conclusione ben diversa. Vedremo perchè simili procedimenti sono errati, e, esaminando in generale la validità dei passaggi al limite nel calcolo delle probabilità, approfondiremo un punto più interessante che è lo scopo principale della presente ricerca.

Avviene molte volte di considerare una variabile casuale X definita come limite di una successione $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ di variabili casuali. Si ammette usualmente senz' altro che, se la legge di probabilità di X_n tende, quando $n \to \infty$, a una legge limite, tale legge debba essere la legge di probabilità di X. Questa proprietà sarebbe anche praticamente molto importante, ma non è vera. Per giungere a tale conclusione occorrono delle condizioni più restrittive di convergenza, quali la convergenza *uniforme* (nel senso usuale) o la convergenza *stocasticamente uniforme* (1) di cui preciseremo il significato.

3. Vediamo intanto il significato dei punti di discontinuità della funzione di ripartizione (che diremo anche *valori ecce-*

(1) *Stocasticamente* = « nel senso del calcolo delle probabilità », locuzione usata specialmente dallo SLUTSKY (*Ueber stochastische Asymptoten und Grenzwerte*, « Metron », Vol. V, N. 3, 1925) che la fa risalire a BERNOULLI (*Ars conjectandi*, Basileae 1713, p. 213).

zionali della legge di probabilità). In molti casi (come in quello, citato, delle frequenze a testa e croce), il significato stesso del problema mostra che vi è una probabilità *finita* p che si abbia esattamente X uguale a un dato valore ξ. In tal caso è ovvio che ξ è un valore eccezionale, e che la Φ vi ha un salto almeno uguale a p. Ordinariamente, e cioè nei problemi pratici cui alludiamo, esso è senz'altro uguale a p.

Se inversamente sappiamo che ξ è un valore eccezionale per la variabile casuale X, e la Φ vi ha un salto uguale a p, risulta che, comunque piccolo si scelga un intorno $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ del punto ξ, la probabilità che X vi appartenga è sempre maggiore o uguale a p (e che tende a p quando $\varepsilon \to 0$). E se n'è voluto concludere, reciprocamente, che si ha probabilità $= p$ che sia esattamente $X = \xi$.

Tanto vale, per esaminare la questione, fissare le idee su una legge particolare semplicissima: $\Phi(\xi) = 0, 1/2, 1$ a seconda che $\xi < 0$, $\xi = 0$, $\xi > 0$. Una variabile casuale X che segue tale legge ha probabilità nulla di differire da zero per più di un ε assegnato comunque piccolo: si potrà concludere che si ha probabilità $= 1$ che X sia esattamente nulla? Un esempio semplicissimo mostra che tale probabilità può addirittura essere nulla, di più, che può anzi essere impossibile che la X sia nulla. Supponiamo che la X sia suscettibile di assumere con uguale probabilità un'infinità numerabile di valori $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$, non nulli ma tendenti a zero. Scelto comunque ε, la probabilità che sia $|X| < \varepsilon$ è sempre 1, perchè i casi favorevoli sono infiniti (tutti i ξ_n per n superiore a un certo N), mentre quelli contrari sono al più in numero finito. Eppure è certamente $X \neq 0$.

L'errore che si commette usualmente sta in ciò, che si dimentica che il teorema delle probabilità totali vale soltanto per una somma di probabilità in numero finito. Se si ha una infinità numerabile di eventi incompatibili $E_1\ E_2 \dots E_n \dots$, di probabilità $p_1\ p_2 \dots p_n \dots$, la probabilità che si verifichi almeno uno di essi è uguale *o maggiore* della somma delle probabilità. Nell'esempio precedente, se è nulla per ogni n la probabilità che sia $|X|$ compreso fra $\frac{1}{n-1}$ e $\frac{1}{n}$, non può concludersi sia nulla la probabilità che sia $X \neq 0$ (e cioè che $|X|$ appartenga a *uno* di questi infiniti intervalli).

Lo stesso equivoco conduce ad affermare in generale che, per $\xi \to \pm\infty$, $\Phi(\xi)$ *deve* tendere a 0 ed a 1. O almeno così dev' essere se X non può assumere i valori $\pm\infty$. Può darsi benissimo invece che la X sia necessariamente finita, senza che si possa scegliere ξ abbastanza grande da avere probabilità minore di un ε assegnato che X superi ξ. Quando si parla di un « numero intero positivo scelto a caso » (tutti i numeri interi sono ugualmente probabili), la funzione di ripartizione è $\Phi(\xi) = 0$, perchè, comunque grande sia ξ, solo un numero finito di numeri interi positivi è minore di ξ, e infiniti sono quelli maggiori.

Concludendo: la probabilità che sia $X < \xi$ è non minore del limite sinistro di Φ in ξ e non maggiore del limite destro; la probabilità che sia $X \leq \xi$ sodisfa le stesse restrizioni, oltre ad essere $\geq$ della precedente; ne risulta che la probabilità di avere esattamente $X = \xi$ è non maggiore del salto di Φ in ξ. Nessuna conclusione più precisa è lecito trarre dal solo fatto di conoscere la funzione di ripartizione, e in particolare la probabilità che sia $X = \xi$ può esser nulla anche se ξ è valore eccezionale.

4. Prima di parlare in generale del limite di una successione di variabili casuali, considereremo un problema classico che si ricollega al teorema di Bernoulli. È vero che, in relazione al significato pratico che nel problema può interessare, lo sviluppo che ne faremo può sembrare ozioso, ma mi pare che possa chiarire, come esempio particolarmente semplice, la natura della questione. E in altri casi che vedremo l' importanza è anche pratica.

Siano $E_1\, E_2 \ldots E_n \ldots$ un' infinità numerabile di eventi — ad esempio di prove di un medesimo fenomeno — e siano tutti indipendenti e ugualmente probabili. Detta p la loro probabilità ed X_n la frequenza sulle prime n prove (numero delle prove favorevoli sulle prime n, diviso per n) possiamo concludere che

$$\lim_{n=\infty} X_n = p \quad ?$$

O almeno che tale relazione ha probabilità $= 1$ di verificarsi? Che è praticamente certa?

Era noto già a Bernoulli che, pur di scegliere n abbastanza grande, la probabilità che sia

$$| X_n - p | < \varepsilon$$

si può rendere maggiore di $1 - \theta$, comunque piccoli siano stati scelti i numeri θ ed ε. Ossia: pur di scegliere n abbastanza grande, si può raggiungere un grado di certezza comunque grande che la frequenza coincida colla probabilità con un' approssimazione comunque buona.

Per molto tempo ciò sembrò sufficente a concludere che, imaginando di fare un' infinità numerabile di prove, si dovesse imaginare che la frequenza tenderebbe ad avvicinarsi sempre più al valore della probabilità. Ma ciò non è vero, perchè dal fatto che la probabilità di molti o addirittura infiniti eventi sia prossima ad 1 non si può concludere che è prossima ad 1 la probabilità del loro coverificarsi (prodotto logico); se abbiamo cioè un gran numero, o un' infinità, di eventi praticamente certi, non è per ciò solo praticamente certo che essi si verifichino *tutti*.

Ciò ha notato il CANTELLI: perchè sia

$$\lim_{n=\infty} X_n = p$$

non basta che esista un n per cui $| X_n - p |$ è $<$ di un ε assegnato, ma occorre che esista un N tale che detta relazione sussista per ogni $n > N$. E ciò non scende senz'altro dall' enunciato precedente. Però il CANTELLI ha potuto dimostrare (1) che, scelti θ ed ε comunque piccoli è effettivamente possibile scegliere N in modo che, comunque grande si scelga m, sia sempre $> 1 - \theta$ la probabilità che si abbia contemporaneamente

$$| X_n - p | < \varepsilon$$

per ogni n compreso fra N ed $N + m$.

È sufficiente il nuovo enunciato per la conclusione che ci interessa? Formalmente almeno, no. Dire che m può essere comunque grande non significa dire che possa essere infinito.

Il teorema di CANTELLI, pur avendo una portata tanto maggiore di quello di BERNOULLI, non si può esprimere, a rigore, dicendo che la probabilità è il limite della frequenza, nè che ciò avviene con certezza pratica più o meno grande.

5. Sarà possibile una simile dimostrazione?

Vedremo che no.

Se indichiamo con 1 e 0 rispettivamente le prove favorevoli e sfavorevoli, le successioni possibili di prove saranno le successioni di cifre 0 e 1. Il teorema che si vorrebbe dimostrare è che, data una legge di probabilità per la scelta di simili

(1) Cfr. CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, Vol. I, p. 78.

successioni, soltanto se in tutte (o nell'immensa maggioranza di esse: a meno cioè di un insieme di probabilità nulla) la percentuale delle cifre « 1 » tende a un limite compreso fra $p \pm \varepsilon$ (comunque ε sia stato prefissato), è possibile che sia sempre p la probabilità che la cifra d'ordine n (n qualunque) sia 1, e ciò indipendentemente dal valore delle altre cifre.

Sia per semplicità $p = \frac{1}{2}$ (caso di testa e croce, ad es.).

I casi possibili siano i seguenti

$$
\begin{array}{l}
1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
\left\{\begin{array}{l} 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left\{\begin{array}{l} 0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 0\ 0\ \ldots\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\ 1\ \ldots\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots \end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Essi sono ottenuti facendo seguire un 1 e tutti 0 alle disposizioni possibili di n lettere 0 e 1, cominciando da $n = 0$ e successivamente per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e così di seguito. Nel sistema di numerazione in base 2, tali successioni sono le mantisse di $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}; \ldots$ Diremo successioni del tipo n-esimo quelle per cui l'ultimo 1 è la cifra d'ordine n (mantisse delle frazioni con denominatore 2^n). È ovvio che il limite della frequenza di 1 è sempre nullo (le cifre 1 sono, in ogni successione, in numero finito). Eppure, se supponiamo che questi casi siano tutti ugualmente probabili, e che la probabilità di una classe infinita di essi si calcoli col metodo usuale del passaggio al limite (1), la probabilità che l'ennesima cifra sia 1 è uguale a $\frac{1}{2}$, perchè fra le successioni del tipo m, per ogni $m > n$, quelle che hanno l'ennesima cifra $= 1$ sono sempre la metà. E ciò anche limitatamente alle successioni che hanno comunque assegnate le cifre precedenti l'ennesima, con che si prova l'indipendenza.

In questa scelta gli eventi $E_1\ E_2 \ldots E_n \ldots$ sono dati dal presentarsi d'un 1 al 1^o, $2^o, \ldots$, n-^{mo}, ... posto; essi sono indipendenti e ugualmente probabili ($p = \frac{1}{2}$); ciò basterebbe, se valessero i criticati passaggi al limite, a concludere che il limite della frequenza dev'essere, in tutti o quasi tutti i casi, uguale a $\frac{1}{2}$; invece esso è sempre nullo.

È ovvio che si sarebbe potuto facilmente far sì che il limite fosse un numero qualunque fra 0 e 1, o anche che fosse una variabile casuale con legge di probabilità qualunque (limitata naturalmente fra 0 e 1), o addirittura che, in generale, non esistesse, e che il minimo e massimo limite fossero una coppia di variabili casuali Y e Z con una legge qualunque di probabilità a due dimensioni (naturalmente con le limitazioni $0 \leq Y \leq Z \leq 1$). Bastava fare una convenzione diversa dalla nostra: di far seguire sempre tutte cifre 0 all' ultima cifra 1.

6. Spieghiamo subito di dove nasce l' apparente paradosso. Limitandoci all' esempio semplice che abbiamo costruito, *viene di certo un momento al di là del quale tutte le prove sono sfavorevoli*, ma quando questo momento venga non si sa, ed è pressochè certo che sarà immensamente lontano, cosicchè i valori della probabilità non ne subiscono nessuna influenza. Uno che conosce soltanto questi valori, e che, fidandosi del passaggio al limite, ne deducesse la legge del limite della frequenza, errerebbe. Però, e si comprende facilmente, valgono tanto il teorema di BERNOULLI che quello, più restrittivo, di CANTELLI: per un numero *comunque grande*, ma *prefissato* di prove tutto va bene, ma non si può trarre una conclusione per *ogni* numero *comunque grande*.

Si potrebbe essere tentati di concludere che, nel calcolo delle probabilità, parlare di passaggio al limite in senso mate-

(1) Si confronti la mia nota: *Sulle probabilità numerabili e geometriche*, Rend. R. Ist. Lombardo, S. II, Vol. LXI, 1928, p. 817-824.

matico non ha senso, che i problemi stessi che si presentano divengono, a rigore, privi di senso quando si parla di limite. E, quindi, parlare di limite avrebbe sempre un significato convenzionale: parlare del limite della frequenza significherebbe ad esempio, nel problema precedente, parlare della frequenza su un numero molto grande di prove, trattandola con formule asintotiche, tanto più approssimate e probabili quanto più è grande tale numero. Le espressioni che critico sarebbero dunque, a rigore, erronee, ma non costituirebbero che un comodo linguaggio convenzionale, e in tale senso andrebbero considerate (1).

Ma, anzitutto, se così è, è necessario dirlo e dimostrarlo esplicitamente, come ho fatto. E poi non è vero che un passaggio al limite fatto con tutto il rigore non sia *mai* possibile, e nemmeno che non abbia *mai* importanza pratica. È quello che vedremo, e che mostra anche l'inopportunità di usare *convenzionalmente* quegli enunciati nei casi in cui sono a rigore erronei.

7. Consideriamo una serie di potenze $\sum_0^\infty{}_h\, a_h z^h$, i cui coefficienti a_h siano scelti a caso nell'intervallo $(-1, 1)$. Supponiamo cioè che $a_0, a_1, \ldots, a_h, \ldots$ siano variabili casuali indipendenti e seguano la medesima legge (densità di probabilità costante in $(-1, 1)$, e nulla altrove). Fissiamo un valore particolare di z, $0 < z < 1$, e poniamo

$$X_n = \sum_0^n{}_h\, a_h z^h, \quad X = \lim_{n=\infty} X_n = \sum_0^\infty{}_h\, a_h z^h.$$

Vedremo che la legge di probabilità di X si può esattamente determinare: si può rigorosamente dimostrare che è la legge limite della legge di probabilità di X_n.

Il fatto essenziale è che la convergenza è *uniforme*. Quali si siano i valori assunti da $a_0, a_1, \ldots, a_h, \ldots$ noi possiamo dire a priori che è

$$| X - X_n | = | \sum_n^\infty{}_h\, a_h z^h | \leq \sum_n^\infty{}_h\, z^h = \frac{z^n}{1-z},$$

e, per $n \to \infty$, tale espressione tende a zero. Assegnato ε comunque piccolo, si può dunque fissare N abbastanza grande

(1) Sarebbe cioè soltanto la *legge di probabilità* di X_n, non la *variabile casuale* X_n, che tende a un limite.

per avere $|X - X_n| < \varepsilon$ per ogni $n > N$, e detta Φ_n la funzione di ripartizione di X_n, ne risulta intuitivamente che la legge Φ_n deve finire per differire, al crescere di n, di quanto poco si vuole, da una legge limite Φ, che è la legge di probabilità di X.

Dimostriamolo rigorosamente, e cominciamo collo stabilire il seguente lemma. Sia Z la somma di due variabili casuali X e Y, e Y non possa assumere valori esterni a un dato intervallo (α, β). Detta Φ la funzione di ripartizione di Z e Φ_1 quella di X, si ha allora

$$\Phi_1(\xi - y) \leqq \Phi(\xi) \leqq \Phi_1(\xi - x)$$

per ogni $x < \alpha$ e per ogni $y > \beta$. Pongasi infatti $x = \alpha - 2\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Perchè sia $Z = X + Y < \xi + \varepsilon$, dev'essere

$$X < \xi + \varepsilon - Y \leqq \xi + \varepsilon - \alpha\,;$$

la probabilità della disuguagliauza $Z < \xi + \varepsilon$, che è non minore di $\Phi(\xi)$, è dunque non maggiore della probabilità della disuguaglianza $X < \xi + \varepsilon - \alpha$, che è non maggiore di

$$\Phi_1(\xi + 2\varepsilon - \alpha) = \Phi_1(\xi - x).$$

È quindi $\Phi(\xi) \leqq \Phi_1(\xi - x)$, e, invertendo i segni, si ha la disuguaglianza simmetrica, c. d. d.

In secondo luogo, dimostriamo che, se X_n tende uniformemente ad X, la legge di probabilità Φ_n tende ad una legge limite Φ.

Sia infatti $X = X_n + R_n$, e il resto $|R_n| \leqq \varepsilon'_n < \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to \infty$ (1). Si vede allora che, se esistono infiniti n per cui $\Phi_n(\xi) \geqq a$, non può esistere $\xi' > \xi$ tale che sia $\Phi_m(\xi') < a$ per infiniti valori di m. Se infatti n ed m sono abbastanza grandi perchè $|X_n - X_m| < \varepsilon_n + \varepsilon_m < \xi' - \xi$, abbiamo per il lemma precedente $\Phi_m(\xi') \geqq \Phi_n(\xi)$, e, potendosi prendere n in modo che $\Phi_n(\xi) \geqq a$, ne risulta a maggior ragione $\Phi_m(\xi') \geqq a$. Ossia: se $\xi' > \xi$, il massimo limite di $\Phi_n(\xi)$ non può superare il minimo limite di $\Phi_n(\xi')$, e quindi il massimo e minimo limite coincidono necessariamente, a meno dei punti in cui sono funzioni discontinue di ξ.

(1) Basterebbe, a rigore, supporre nullo il minimo limite di ε_n, e ragionare sempre (anche, certo, pei passaggi al limite) soltanto su una successione parziale $n_1\, n_2 \ldots n_h \ldots$ per cui $\varepsilon_{n_h} \to 0$.

Si dice che una legge di probabilità Φ_n tende a una legge limite Φ se è $\lim \Phi_n(\xi) = \Phi(\xi)$ in ogni punto di continuità ξ della Φ (1): in questo senso rimane dunque dimostrato l'asserto.

Resta infine a provare che la legge limite Φ è effettivamente la legge di probabilità della variabile casuale limite X, ossia che, pei punti ξ in cui Φ è continua, la probabilità che sia $X < \xi$ è $\Phi(\xi)$. Ma per il solito lemma essa è infatti compresa tra $\Phi_n(\xi - \varepsilon_n)$ e $\Phi_n(\xi + \varepsilon_n)$, che, se Φ è continua in ξ, tendono entrambi a $\Phi(\xi)$.

8. La convergenza uniforme è però una condizione troppo restrittiva, e si presenta ben raramente nelle applicazioni. E anche il problema che abbiamo preso come esempio è piuttosto artificioso. La condizione che ha in simili problemi la massima importanza è quella della convergenza *stocasticamente uniforme* (2).

Ecco la definizione. Sia $X_1\ X_2 \ldots X_n \ldots$ una successione di variabili casuali, e si sappia che esiste $X = \lim X_n$. Diremo allora che X_n converge verso il suo limite in modo stocasticamente uniforme se, assegnati due numeri ε e θ comunque piccoli, è sempre possibile scegliere N tale che per ogni $n > N$ (3) la disuguaglianza $|X - X_n| < \varepsilon$ abbia probabilità maggiore di $1 - \theta$.

Anche in tal caso $\Phi_1\ \Phi_2 \ldots \Phi_n \ldots$ tendono a una legge limite Φ, e questa legge limite è effettivamente la legge di probabilità della variabile casuale limite X.

Al precedente lemma va sostituito il seguente. Se Z è la somma di due variabili casuali X e Y, e la probabilità della disuguaglianza $\alpha \leq Y \leq \beta$ è maggiore di $1 - \theta$, dette Φ e Φ_1 la funzione di ripartizione di Z e rispettivamente di X, si ha

$$\Phi_1(\xi - y) - \theta \leq \Phi(\xi) \leq \Phi_1(\xi - x) + \theta$$

per ogni $x < \alpha$ e per ogni $y > \beta$.

Perchè sia $Z < \xi + \varepsilon$ dev' essere infatti $X < \xi + \varepsilon - \alpha$ oppure $Y < \alpha$. Questa seconda ipotesi ha probabilità minore

(1) Cfr. Lévy, *Calcul des probabilites*, p. 192.

(2) V. la mia nota *Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio*, Rend. Lincei 1929, II sem.

(3) A rigore, come nel caso precedente, basta che esista *un* n; ci riferiamo al caso più semplice perchè è il più interessante e perchè evita fastidiose ma del resto facili sottigliezze.

di θ, per la prima vale quanto già detto, e quindi

$$\Phi(\xi) \leqq \Phi_1(\xi - x) + \theta$$

(e analogamente la simmetrica), c. d. d.

Per la seconda parte, dovremo supporre che la disuguaglianza $|R_n| \leqq \varepsilon'_n < \varepsilon_n$ abbia probabilità $> 1 - \theta$; allora la probabilità che sia contemporaneamente $|R_n| \leqq \varepsilon'_n$, $|R_m| \leqq \varepsilon'_m$ è $> 1 - 2\theta$. Se esistono infiniti n per cui $\Phi_n(\xi) \geqq a$, ed è $\xi' > \xi$, pur di prendere n ed m abbastanza grandi perchè sia $\varepsilon_n + \varepsilon_m < \xi' - \xi$, risulta per il lemma precedente

$$\Phi_m(\xi') + 2\theta \geqq \Phi_n(\xi)$$

ed anche $\Phi_m(\xi') \geqq a - 2\theta$. Potendosi θ fissare piccolo a piacere sarà ancora $\Phi_m(\xi') \geqq a$, e si giunge così alla stessa conclusione di prima: che esiste la legge limite.

Ed essa è ancora la legge di probabilità della variabile casuale limite X. La probabilità della disuguaglianza $X < \xi$ è allora compresa, per il lemma, tra

$$\Phi_n(\xi - \varepsilon_n) - \theta \quad \text{e} \quad \Phi_n(\xi + \varepsilon_n) + \theta;$$

se Φ è continua in ξ, entrambe queste espressioni si possono far tendere a $\Phi(\xi)$, e ciò prova l'asserto.

9. Come esempio riassumo qui il problema che mi condusse a queste considerazioni (1).

Sia $X(\lambda)$ una funzione continua a incremento aleatorio a legge fissa; per il significato preciso di questa definizione dovrei rimandare a un lavoro precedente (2), ma per comprendere il lato della questione che ora interessa basta sapere che $X(\lambda)$ è una funzione continua della variabile reale λ, il cui andamento non è però conosciuto, e che potrà dunque, con probabilità opportunamente determinate, sodisfare o non sodisfare certe condizioni.

In particolare, si determina facilmente la legge di probabilità Φ_n della media di n ordinate equidistanti dell'intervallo (0, 1), cioè di

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{1\,h}^{n} X\left(\frac{h}{n}\right),$$

(1) V. nota cit.

(2) *Sulle funzioni a incremento aleatorio*, Rendiconti Lincei, 1929, II sem.; cfr. anche *Possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori*, id. id.

e si dimostra che Φ_n tende a una legge limite Φ. D'altronde è certo, per la continuità della funzione X, che

$$\lim_{n=\infty} S_n = S = \int_0^1 X(\lambda)\, d\lambda\,.$$

Può dirsi che la legge di probabilità dell'integrale S è la Φ?

Si tratta di vedere se S_n tende ad S in modo stocasticamente uniforme oppure no. Un caso facile è quello in cui sappiamo che la funzione $X(\lambda)$ è non decrescente; è noto allora che è certamente

$$| S - S_n | \leq \frac{1}{n} \{X(1) - X(0)\},$$

e la convergenza è stocasticamente-uniforme. Si può infatti dimostrare che, assegnati comunque θ ed ε, si può fissare ξ sufficentemente grande perchè la disuguaglianza

$$X(1) - X(0) > \xi$$

abbia probabilità minore di θ, e, successivamente, N abbastanza grande perchè $\frac{\xi}{N} < \varepsilon$. Per ogni $n > N$ la disuguaglianza $| S - S_n | > \varepsilon$ ha allora probabilità $< \theta$.

Per il caso più generale, si potrebbe cercare di costruire una funzione maggiorante, $F_\delta(a)$, della probabilità che in un intervallo (α, β) di lunghezza $\beta - \alpha = \delta$ la X non rimanga sempre compresa fra $X(\alpha) \pm a$. Se, diviso l'intervallo (0, 1) in n parti uguali, la X non differisce in nessuna di esse per più di a, in valore assoluto, dal valore che ha nell'estremo, è certamente $| S - S_n | < a$.

Si ha quindi probabilità maggiore di $\{1 - F_{\frac{1}{n}}(a)\}^n$ che sia $| S - S_n | < a$, e la convergenza stocasticamente-uniforme è dimostrata se si riesce a determinare F tale che

$$\{1 - F_{\frac{1}{n}}(a)\}^n \to 1, \quad \text{ossia} \quad n\, F_{\frac{1}{n}}(a) \to 0$$

(per a fisso ma piccolo a piacere, ed $n \to \infty$).

Roma, 2 dicembre 1929 - A. VIII.