SUL COMPORTAMENTO ASSINTOTICO DELLA MORTALITÀ

In: *«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo»*, Palermo, 1934,
T. LVIII, pp. 359-366

Offerto dall'Autore.

Pubblicazione bimestrale.

TOMO LVIII. **ANNO 1934-XIII.**

RENDICONTI
DEL
CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

DIRETTORE: M. DE FRANCHIS.

ADUNANZA DEL 22 LUGLIO 1934-XII.

BRUNO DE FINETTI

Sul comportamento assintotico della mortalità.

(Estratto).

DIREZIONE E REDAZIONE

30, VIA RUGGIERO SETTIMO — PALERMO (ITALIA)

SUL COMPORTAMENTO ASSINTOTICO DELLA MORTALITÀ.

Nota di **Bruno de Finetti** (Trieste).

Estratto dal tomo LVIII (1934 - XIII) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 22 luglio 1934-XII.

Molto si è scritto recentemente a proposito dell'« età limite », usualmente indicata « età ω ». Voglio esporre brevemente il mio punto di vista sull'argomento, sia perchè esso vuol mettere il problema in una luce diversa, sia per giustificare le vedute su cui si basa il procedimento per il calcolo delle probabilità di morte nelle età senili adottato nella costruzione delle ultime tavole di mortalità della popolazione italiana, procedimento proposto da me e discusso e approvato dai proff. GINI e GALVANI, quando mi occupavo di tale lavoro all'Istituto Centrale di Statistica [1]).

1. *Considerazioni preliminari.* — Indichiamo con $l(x)$ la probabilità che ha un individuo, alla nascita, di morire in età $> x$. A parte la terminologia, la $l(x)$ è l'usuale funzione di sopravvivenza: $l(x)$ moltiplicata per un milione si può infatti interpretare come il valor medio (speranza matematica) del numero dei sopravviventi all'età x su un milione di nascite; $l(x)$ costituisce cioè la *funzione di ripartizione* del numero aleatorio X = « durata della vita di un individuo » = « età alla morte di un individuo », ed è precisamente

$$l(x) = \text{Prob.}\,(X > x)$$

[per attenersi alla forma più usuale, « funzione di ripartizione » sarebbe a dirsi la funzione complementare $1 - l(x) = \text{Prob.}\,(X \leqq x)$].

La $l(x)$ è ovviamente funzione mai crescente; come ogni funzione di natura empirica, e come tale solo approssimativamente definita, non hanno senso per essa problemi che implichino la sua conoscenza perfetta (non ha senso chiedere ad es. se è derivabile, lipschitziana, assolutamente continua, ecc.); la si può tuttavia sempre rap-

[1]) Cfr. C. GINI e L. GALVANI, *Tavole di mortalità della popolazione italiana* [Annali di Statistica, S. VI, Vol. VIII (1931)].

presentare, se è utile, mediante una funzione continua e derivabile che coincida con essa entro i limiti del grado di approssimazione con cui la si può pensare empiricamente definita. Supposto quindi $l(x)$ derivabile, poniamo

$$\mu(x) = -\frac{1}{l(x)}\frac{d\,l(x)}{dx} = -\frac{d\log l(x)}{dx} \qquad \left(\text{da cui } l(x) = e^{-\int_0^x \mu(z)dz}\right);$$

come è ben noto, e come la definizione stessa mostra palesemente, $\mu(x)$ rappresenta *l'intensità di mortalità,* e cioè $\mu(x)dx$ è la probabilità che un individuo, vivo all'età x, muoia entro il successivo tempuscolo dx. L'opinione comune, in tesi generale confermata dall'esperienza, che la mortalità peggiora al crescere dell'età, si esprime matematicamente nel supporre $\mu(x)$ crescente; va da sè che si deve escludere il periodo dell'infanzia, ma è da osservare che anche all'infuori di esso si potrebbe essere indotti ad abbandonare la detta condizione. È noto ad es. che un massimo secondario per i quozienti grezzi di mortalità si riscontra generalmente verso i 20-25 anni; per molto tempo i perequatori si preoccuparono di farlo scomparire, ligi all'idea della monotonia di $\mu(x)$, e ora invece ci si sforza di conservarlo, fatti persuasi che si tratti di un fenomeno significativo anzichè di un'irregolarità casuale. E un dubbio analogo potrebbe presentarsi perfino nelle età avanzate; dice appunto il GINI [2]) osservando i quozienti di mortalità della popolazione italiana (1921): « sembrerebbe che, per le età intorno al 90° anno e fino verso i 100 l'incremento dei coefficenti di mortalità subisca un arresto, quasi che gli organismi sopravissuti fino a quell'età possano sfidare impunemente la morte ». Basterebbe che il fenomeno descritto fosse un po' più accentuato per avere, anzichè un « arresto », un « regresso ». Non è certo per ciò il caso di fondatamente pensare che anche per tali età si debba abbandonare la monotonia di $\mu(x)$; comunque, e solo questo preme quì rilevare, la monotonia di $\mu(x)$ non può essere considerata come un assioma o un teorema o una legge naturale, ma soltanto come una restrizione che appare ragionevole, e che è spontaneo accettare finchè l'esperienza non obblighi a qualche deroga.

2. *I tre possibili andamenti assintotici.* — Supposto $\mu(x)$ crescente, i casi possibili, circa l'andamento assintotico di $l(x)$ e $\mu(x)$ al crescere di x sono i tre seguenti:

a) esiste un'età, e sia ω, tale che $l(\omega) = 0$ [mentre $l(\omega - \varepsilon) > 0$, per $\varepsilon > 0$];

b) è $l(x) > 0$ qualunque sia x, e $\mu(x)$ cresce oltre ogni limite;

c) è $l(x) > 0$ qualunque sia x, ma $\mu(x)$ cresce senza superare un limite superiore $\bar{\mu} = \lim_{x\to\infty} \mu(x)$.

---

[2]) C. GINI, *Sulle tavole di mortalità della popolazione italiana* [Atti Istituto Nazionale Assicurazioni, vol. I, pag. 120].

In entrambi i casi *b*) e *c*) si ha evidentemente $\lim_{x \to \infty} l(x) = 0$ $\left(\text{perchè } \int_0^x \mu(z)\,dz = -\log l(x) \text{ cresce oltre ogni limite}\right)$.

Nella disamina di questi casi ci si lascia di solito trascinare da pregiudizi o addirittura da frasi prive di un valore logico qualsiasi. Così si crede talvolta di giustificare la prima forma di andamento osservando che la durata della vita umana non può essere infinita! Altre volte [3]) il secondo caso e il terzo si escludono per delle pretese assurdità che essi conterrebbero, assurdità che sono totalmente illusorie. Basti dire che un Autore [4]) non riesce a comprendere come $\mu(x)$ possa diventare «maggiore dell'unità», e vorrebbe arrestare la curva $l(x)$ all'età in cui « $\mu(x)$ diviene uguale ad 1 ». Si tratta evidentemente di un inesplicabile equivoco in cui una « densità di probabilità » viene confusa con una « probabilità »: non $\mu(x)$ è una probabilità, ma $\mu(x)dx$. Di più, non ha neppur senso dire che è minore o maggiore dell'« unità », perchè $\mu(x)$ non è un puro numero, ma una grandezza fisica di dimensione $(\text{tempo})^{-1}$ (come una velocità angolare): quando è $\mu = 1$ nella solita unità di misura in $(\text{anni})^{-1}$, è $\mu = 100$ se espresso in $(\text{secoli})^{-1}$, è $\mu = 1/365$ se espresso in $(\text{giorni})^{-1}$, ecc., cosicchè qualunque età x potrebbe considerarsi come età ω, pur di scegliere l'unità di misura in modo opportuno. Infine, trovare che μ non può superare l'ipotetica « unità » significa cadere nel medesimo grossolano abbaglio di chi sostenesse essere impossibile correre sull'autostrada Roma-Ostia con velocità di 100 km. (sottinteso, o meglio *dimenticato*, all'ora) perchè essa è lunga meno di 100 km. [5]). Un'altra obiezione altrettanto ma meno palesemente illusoria consiste nell'osservare che la probabilità annua di morte

$$q(x) = 1 - \frac{l(x+1)}{l(x)} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+z)dz}$$

---

[3]) Cfr. parecchi scritti di F. INSOLERA e uno di F. GIACCARDI in [Giornale di Matematica Finanziaria] (dal 1929 in poi).

[4]) In relazione alle polemiche di cui è fatto cenno nella successiva Nota del Prof. DE FRANCHIS, desidero rilevare che il presente articolo era terminato (vedi data) il 6 aprile u. s.; fu il Prof. CANTELLI, al quale avevo fin d'allora inviato il manoscritto colla preghiera di esaminarlo, a informarmi del giudizio in corso all'Accademia dei Lincei, e a consigliarmi di ritardare la pubblicazione per un senso di riguardo verso uno dei concorrenti.

(Aggiunto sulle bozze; dicembre 1934-XIII).

[5]) La più chiara idea delle assurdità cui porta tale equivoco è data dall'A. stesso ove definisce la *intensità complementare* $1 - \mu(x)$ come una misura istantanea della *vitalità!* Per tornare al nostro esempio, sarebbe come definire quale « lentezza » nel percorrere l'autostrada Roma-Ostia il complemento della velocità alla lunghezza del percorso (23 Km.); la velocità di « 20 Km. » equivarrebbe quindi a una « lentezza » di « 3 Km. » (essendo una differenza tra *lunghezza* e *velocità*, non posso sapere se si preferisca « 3 Km. » o « 3 Km. all'ora »).

(Aggiunto sulle bozze; dicembre 1934-XIII).

avrebbe un flesso $q''(x) = 0$: si trova strano che « gli incrementi delle probabilità di morte aumentino fino ad una certa età dopo la quale rallentano il ritmo di variazione ». È invece manifesto che, non potendo superare l'unità, $q(x)$ non possa andar crescendo sempre più rapidamente! E anche qui un'analoga osservazione: anzichè la probabilità di morte annua si può considerare, più in generale, la probabilità di morte per un'unità di tempo generica τ: e cioè la probabilità $q_\tau(x)$ che un individuo, vivo all'età x, muoia entro un tempo τ, ossia in formule

$$q_\tau(x) = 1 - \frac{l(x+\tau)}{l(x)} = 1 - e^{-\int_0^\tau \mu(x+z)dz}.$$

La $q(x)$ precedente non è che una qualunque delle $q_\tau(x)$, con nessun'altra particolarità che quella di avere $\tau = 1$ anno, uguale cioè a quella che — per mera convenzione — è l'unità di tempo correntemente usata in simili problemi; il suo « punto di flesso » non costituisce dunque minimamente una caratteristica significativa o sostanziale del fenomeno [6]).

Le precedenti osservazioni mettono in rilievo l'importanza che dovrebbero avere, anche nel campo statistico-attuariale, quelle considerazioni di « omogeneità » delle grandezze fisiche e di relatività delle unità di misura che sono ormai tanto familiari nelle scienze sperimentali e nella tecnica. Tali considerazioni risparmierebbero senz'altro, non solo errori come quelli accennati, ma anche frequenti definizioni puramente illusorie.

---

[6]) Si può anzi dimostrare che anche l'accettazione di un simile criterio condurrebbe a poter considerare come età ω un'età qualunque pur di scegliere opportunamente l'unità di tempo τ (salvo, naturalmente, nel caso dell'ipotesi *a*)). È infatti

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_\tau(x) = e^{-\int_0^\tau \mu(x+z)dz} \{[\mu(x+\tau) - \mu(x)] - [\mu(x+\tau) - \mu(x)]^2\},$$

e quindi è $q''_\tau(x) > 0$ se e soltanto se

$$\mu'(x+\tau) - \mu'(x) > [\mu(x+\tau) - \mu(x)]^2.$$

Si tratta di dimostrare che, fissata comunque un'età x (per cui $\mu'(x) > 0$), tale disuguaglianza non può mantenersi verificata per τ qualunque, e quindi, fissando τ in modo opportuno, si ha $q''_\tau(x) = 0$, ossia x sarebbe, secondo il criterio criticato, l'età ω.

Essendo x fisso possiamo sottintenderlo; scriviamo

$$\mu(x+\tau) = k + \alpha^2\tau - \varphi(\tau) \quad \text{con} \quad k = \mu(x), \quad \alpha^2 = \mu'(x), \quad \text{cosicchè} \quad \varphi'(0) = 0.$$

La disuguaglianza diviene $\varphi'(\tau) > [\alpha^2\tau + \varphi(\tau)]^2$, da cui, essendo $\varphi(\tau) = -\alpha^2\tau + \alpha \operatorname{tg}(\alpha\tau)$ la soluzione dell'equazione differenziale che si ottiene cambiando il segno $>$ in $=$, si deduce che dev'essere $\varphi(\tau) > -\alpha^2\tau + \alpha \operatorname{tg}(\alpha\tau)$, $\mu(x+\tau) > \mu(x) + \alpha \operatorname{tg}(\alpha\tau)$. Ciò è assurdo (all'infuori dell'ipotesi *a*)) perchè μ diverrebbe infinita a distanza finita $\left(\text{e precisamente per un'età inferiore ad } x + \frac{\pi}{2\sqrt{\pi'(x)}}\right)$.

3. *Esame dei tre casi.*

a) Se

$$l(\omega) = 0 \qquad \left(l(\omega - \varepsilon) > 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon > 0\right)$$

è necessariamente $\lim_{x \to \omega} \mu(x) = \infty$, ed anzi $\mu(x)$ è infinito d'ordine non inferiore ad 1. Dev'essere infatti

$$0 = l(\omega) = e^{-\int_0^\omega \mu(z)dz}, \qquad \int_0^\omega \mu(z)\,dz = \infty.$$

Dal punto di vista del significato, si osservi poi (collo STEFFENSEN) che, se si avesse un individuo di età $\omega - \varepsilon$ (ε comunque piccolo; ad es. $\varepsilon = 1$ giorno), dovremmo essere *sicuri* che esso morrà in giornata. Ciò è assolutamente innaturale, e bisogna dunque limitarsi alle due possibilità successive.

b) Se $\mu(x)$ cresce indefinitamente al crescere di x, si ha — qualunque sia la durata (fissa) τ —

$$\lim_{x \to \infty} q_\tau(x) = 1 \quad \left(\text{è infatti } 1 - q_\tau(x) = e^{-\int_0^\tau \mu(x+z)dz} < e^{-\tau\mu(x)},\ e^{-\tau\mu(x)} \to 0 \quad \text{per} \quad \mu(x) \to \infty\right).$$

Tale circostanza conduce a una conseguenza del tutto simile a quella precedentemente rilevata: scelto infatti ε a piacere, ad es. $\varepsilon = 1$ giorno, e θ comunque piccolo si può scegliere x abbastanza grande perchè la probabilità che un individuo di età x sopravviva un giorno sia inferiore a θ. Anche tale fatto è da scartare: è intuitivo infatti che allorquando si riesca a raggiungere un'età molto avanzata non per questo si ha una quasi certezza di morte entro un giorno. Non rimane dunque se non l'ultima alternativa, e mi propongo di dissipare le diffidenze che mi sembra essa susciti senza ragione.

c) Se $\mu(x)$ cresce tendendo assintoticamente a $\bar{\mu}$, anche $q_\tau(x)$ cresce tendendo assintoticamente ad un valore minore di 1, e precisamente

$$\lim_{x \to \infty} q_\tau(x) = 1 - e^{-\tau\bar{\mu}}.$$

La vita media tende a $\int_0^\infty e^{-\tau\bar{\mu}}\,d\tau = \frac{1}{\bar{\mu}}$, la vita probabile a $\frac{\log 2}{\bar{\mu}} = \frac{0,69}{\bar{\mu}}$.

Per quanto inconsueta, tale ipotesi mi sembra l'unica corrispondente al modo istintivo di pensare di ciascuno di noi; leggendo di un tizio vecchissimo penseremo sì che poco gli rimarrà ancora di vita, ma forse non valuteremo mai superiore a 1/2 la probabilità che egli muoia entro 1 anno, per grande che sia x, certo non valuteremo mai superiore a 1/2 la probabilità che muoia entro un giorno! Io credo che il nostro stato d'animo nel valutare la presumibile sopravvivenza di individui vecchissimi corrisponda circa a supporre l'esistenza di $\bar{\mu}$ e a valutarlo dell'ordine di grandezza tra 0,25 (vita probabile circa 3 anni) e 1,40 (vita probabile circa 1/2 anno) in $(\text{anni})^{-1}$. Riferiamoci per semplicità al caso $\bar{\mu} = 0{,}69$, vita probabile 1 anno; vuol dire che, al di là di un'età, sufficentemente alta, le probabilità di sopravvivere uno, due, ..., n anni ancora si valutano allo stesso modo della probabilità di ottenere testa una, due, ..., n volte di seguito gettando una moneta. È ben noto quanto poco sia probabile che una moneta mostri testa n volte di seguito per n alquanto grande, è pure certo che una serie di n « neri » alla roulette di Montecarlo non si sarà mai verificata se non per n relativamente piccolo. Come mostra tale analogia, il fatto ovvio che le durate di vita di un qualunque insieme finito di individui sono superiormente limitate non richiede dunque, per essere spiegato, l'ipotesi $l(\omega) = 0$ nè quella $\mu(x) \rightarrow \infty$; anche la terza ipotesi ne dà una spiegazione perfettamente convincente.

4. *L'« età estrema »*. — Nel caso *a*) l'« età estrema », ω, ha un significato preciso; nel secondo caso si è tentato trovarlo secondo i ragionamenti illusori precedentemente criticati. Si tratterebbe, nel primo caso veramente, nel secondo erroneamente, di concludere che esiste un'età ω che *non può* essere superata.

Una tale età, nei casi *b*) e *c*), non esiste. Si possono però studiare due problemi che conducono a concetti più o meno analoghi, che vanno tuttavia ben distinti concettualmente tra loro e da quello precedente.

Il primo è quello trattato da GUMBEL [7]): dati n individui, la massima età raggiungibile da uno di essi è un numero aleatorio la cui funzione di ripartizione è $(1 - l(x))^n$. Il problema non differisce, salvo la particolare interpretazione, dal problema generale dello studio della legge di probabilità dei valori estremi in un insieme finito di numeri aleatori indipendenti seguenti la medesima legge di probabilità [8]).

Il secondo è quello indicato da STEFFENSEN [9]), e che vorrei ulteriormente chiarire. Si tratta non di un problema effettivo ben determinato, ma di una questione di sufficenza in certe approssimazioni. Qualcosa di analogo al problema di determinare quanti termini di una serie convergente si debbano usare in pratica per un calcolo numerico, o, più elementarmente ancora, con quante cifre decimali si debbano prendere certi valori. In qualunque problema di questo genere bisogna però tener ben presente che un certo grado di approssimazione si può dire sufficente o insufficente non per

---

7) E. J. GUMBEL; *L'età limite* [Giornale Istituto Italiano Attuari, A. V, n° 1, genn. 1934-XII].

8) Cfr. R. VON MISES, *Ueber die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe* [Sitzungsberichte der Berliner, Math. Ges., (Ott. 1922)]; B. DE FINETTI, *Sulla legge di probabilità degli estremi* [Metron, Vol. IX, n^{i} 3-4 (1932)]; R. A. FISNER, *Limiting formes of the frequency distribution of the largest a smallest membre of a sample* [Proc. Cambridge Math. Soc. vol. XXIV, pt. 2 (1928)].

9) J. F. STEFFENSEN, *Some recent researches in the Teory of statistics and actuarial sciences* [Cambridge, University Press (1930)].

sè stesso, ma soltanto in relazione a un certo determinato scopo: dire, in generale, che, $x'_1 \dots x'_n$ sono valori sufficentemente approssimati di $x_1 \dots x_n$ ha un senso soltanto se si precisa la frase aggiungendo « agli effetti del calcolo di una funzione di tipo determinato $f(x_1 \dots x_n)$, il cui valore interessa a un certo determinato scopo ». Nel caso in esame, l'assumere come « età limite » una certa età ω, significherà sostituire ad $l(x)$, per $x \geqq \omega$, il valore approssimato 0; l'approssimazione sarà a ritenersi praticamente sufficente o non sufficente a seconda che, eseguendo i calcoli sulla base di tali valori approssimati anzichè di quelli esatti, le differenze nelle grandezze interessanti per la matematica attuariale risultino trascurabili o non trascurabili relativamente all'ordine d'approssimazione richiesto per le applicazioni concrete. Poichè gli usuali calcoli attuariali sono basati sulle tavole di commutazione, si presenta spontanea a prima vista l'idea che basti preoccuparsi dei valori ivi contenuti, e richiedere cioè che l'errore da cui vengono ad essere affetti non influisca sulle cifre decimali che nella tavola di commutazione si vogliono far figurare. L'età ω avrebbe quindi un senso, vago sì, ma unico e assoluto, nel senso che potrebbe valere per qualunque problema. È questa l'opinione dello STEFFENSEN, ed è anche giusta in quanto una stessa età ω può valere, nel senso ora detto, per la *quasi* totalità dei problemi. Ma, dal punto di vista concettuale, mi sembra meriti d'esser lumeggiato il significato *relativo* della definizione. Se ad es. un'assicurazione stramba prevedesse un capitale fortissimo in caso di vita a un'età un po' superiore all'età ω scelta col precedente criterio, è chiaro che un'assicuratore non potrebbe più considerare trascurabile il valore di tale impegno; esso è invece trascurabile se tale capitale è il termine di una rendita costante, dato che il valore di un termine così lontano e poco probabile ha un'influenza minima sul valore complessivo della rendita. O anche nel caso della rendita, se il vitaliziato avesse un'età vicinissima ad ω, ad es. $\omega - 1$, sarebbe certamente imprudente da parte dell'assicuratore non tenere nessuna riserva sotto il pretesto che alla prossima scadenza l'assicurato avrebbe età ω, e la $l(x)$ diviene praticamente trascurabile. Ogni problema, a rigore, richiede una propria determinazione dell'età ω; per qualche problema artificiale ω potrebbe addirittura non esistere, come ad es. per una rendita crescente in modo sufficentemente rapido da dar luogo a una serie divergente di valori attuali, analogamente a quanto avviene nel bernoulliano « paradosso di Pietroburgo ». In pratica, ripetiamo, date le forme d'assicurazione in uso e le età generalmente non troppo avanzate degli individui con cui si ha a che fare, un unico valore di ω può ben ritenersi sufficente, e potrebbe anche, per la grandissima parte dei casi, essere scelto ancora molto più basso (forse anche intorno a 90 anni).

5. *L'estrapolazione dei quozienti senili.* — Come passare dalla teoria alla pratica, e tener conto di simili considerazioni nella costruzione di una tavola di mortalità?

Per i calcoli attuariali ben difficilmente potrà apparire vantaggioso allontanarsi dalla tanto servizievole formula di GOMPERZ-MAKEHEAM, che, come è noto, rientra nel caso b); nello stesso caso b) rientra del resto anche la formula gaussiana, la cui applicazione al presente problema è proposta da GUMBEL [10]).

Per lo scopo più propriamente descrittivo che si propongono le tavole di mortalità della popolazione, non si richiede invece l'adattamento di una funzione più o meno teoricamente giustificata, ma soltanto un metodo di aggiustamento, specialmente indispensabile nelle età senili, ove scarsissimi sono i dati e forti, quindi, gli sbalzi. Così posto, il problema consente una ben larga libertà di movimenti, e si ha la possibilità di scegliere qualunque andamento, secondo si ritiene più opportuno.

Il primo, età ω prefissata, era stato generalmente adottato in occasione dei precedenti censimenti. Come età ω si può, o assumere senz'altro l'età della persona più vecchia, o determinare, con un qualunque procedimento di estrapolazione, quando ad $l(x)$ convenga far raggiungere lo zero, rispettivamente a $q(x)$ l'unità.

Il secondo e il terzo conducono invece a un'estrapolazione dei quozienti di mortalità $q(x)$ in modo da farli tendere assintoticamente a un valore che è rispettivamente o uguale all'unità, o minore. Per le ragioni esposte, la soluzione più ragionevole mi sembra quest'ultima; tuttavia, nella costruzione, cui ho accennato, delle ultime tavole di mortalità italiane, sembrò preferibile attenersi alla seconda [11]) per evitare una scelta che, mancando di sufficenti basi statistiche, sarebbe stata eccessivamente arbitraria.

Determinare infatti il valore limite $\bar{q} = 1 - e^{-\bar{\mu}}$ della probabilità di morte in base al materiale disponibile per la costruzione delle tavole di mortalità era affatto sconsigliabile, non solo per la scarsezza, e quindi irregolarità, dei dati, ma anche per la forte influenza di possibili inesattezze. Il modo più opportuno per determinare $\bar{q}$ dovrebbe consistere nel seguire tutti gli individui di età molto alta in una determinata popolazione, vedere che su n individui che hanno raggiunto l'età, ad es. di 90 (oppure 95, 100, anni), $n_1, n_2, \dots, n_h, \dots$ sopravvissero alle età $91, 92, \dots, 90+h, \dots$, e determinare finalmente $\bar{q}$ in modo che sia all'incirca $\frac{n_h}{n_k} = \bar{q}^{h-k}$. Mi astengo di proposito da ogni tentativo di concretare in un metodo preciso questa che dovrebbe essere soltanto l'idea direttiva; ciò non avrebbe alcun interesse se non in vista di un'eventuale applicazione, che spero sarà possibile sulla base dei dati sui longevi che l'Istituto Centrale di Statistica si propone di raccogliere sistematicamente.

Trieste, 6 aprile 1934-XII.

BRUNO DE FINETTI.

---

[10]) E. J. GUMBEL, loc. cit.

[11]) Per maggiori dettagli cfr. C. GINI e L. GALVANI, Op. cit., pag. 32 e pagg. 73-89. Si terrà nota però che i numeri delle figure sono spostati rispetto ai riferimenti nel testo; ove nel testo si parla di «fig. 14» si deve intendere fig. 16, la «fig. 15» del testo è la fig. 15, le figg. 16, 17, 18, del testo sono le 17, 18, 19.

Il metodo adottato consiste nel perequare il diagramma in scala logaritmica delle probabilità di morte mediante un'iperbole con un asintoto corrispondente a $q = 1$ (ossia $\log q = 0$), facendola passare per i quozienti relativi alle età 70, 80, 90, determinati in modo diretto.