LA LOGIQUE DE LA PROBABILITÉ

In: *«Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique»*, Paris, 1935,
Hermann et C.ie Éditeurs, 1936, pp. IV 1-IV 9

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

388-395

B. de Finetti

ACTES DU CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE SCIENTIFIQUE

SORBONNE

PARIS 1935

EXTRAIT

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1936

La logique de la probabilité.

BRUNO DE FINETTI.

Il n'y a pas de doute possible, depuis les belles recherches de MM. Lukasiewicz (1), Reichenbach (2), Mazurkiewicz (3), etc., que le calculs des probabilités peut être considéré comme une logique à plusieurs valeurs (précisément : à une échelle continue de valeurs), et que ce point de vue est le plus propre à éclaircir dans ses fondements la notion et la logique de la probabilité. Mais ce but est loin d'être atteint par la seule conclusion, de nature purement formelle, que le calcul des probabilités est une logique à plusieurs valeurs : cette conclusion n'est utile que comme point de départ, elle ne constitue pas une façon de résoudre le problème, mais seulement une façon heureuse de le poser nettement. Je crois donc utile d'examiner, comparer et discuter les diverses interprétations qu'on peut donner de cette même théorie des probabilités conçue comme logique à plusieurs valeurs.

1. — La logique ordinaire, à deux valeurs, considère des entités logiques (propositions) capables de deux valeurs seulement : « vrai » ou « faux ». Cela serait-il insuffisant ? Est-il nécessaire de considérer une troisième modalité (p. ex. « possible »), ou plusieurs autres ? Pour répondre à cette question, il faut préciser, comme l'ont fait très nettement M. Wittgenstein (4) et M. Hahn (5), qu'en principe il ne s'agit que

(1) Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen der Aussagenkalküls, « C. R. Soc. Sciences Varsovie », 1930, et autres travaux
(2) Wahrscheinlichkeistlehre, Sijthoff, Leiden, 1935.
(3) Zur Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung, « S. P. Towarzystwa Naukowego Warszakskiego », 1932.
(4) Tractatus Logico-Philosophicus, P. Kegan, Londres, 1922.
(5) Logik, Mathematik und Naturerkennen « Einheitswissenschaft » Heft 2, 1933.

de conventions : dans la logique on n'a pas de théorème qui exprime quelque chose de réel, il n'y a que des conventions sur le langage que nous voulons appliquer. Les propositions sont capables de deux valeurs, vrai ou faux, et nulle autre, non pas parce qu'il « existe » une vérité *a priori* nommée « principe du tiers exclu », mais parce que nous nommons « propositions » des entités logiques constituées de telle façon qu'on ne peut que répondre « oui » ou « non ». S'il y avait d'ailleurs d'autres modalités, c'est-à-dire si on avait convenu d'employer une logique à plusieurs valeurs, la différence serait purement formelle, et toute affirmation pourrait être traduite et réduite dans le cadre de la logique ordinaire. Une logique analogue à l'ordinaire mais à trois ou plusieurs valeurs n'aurait donc d'autre but que de condenser plusieurs propositions ordinaires dans une seule entité logique à plusieurs valeurs, ce qui pourrait d'ailleurs très bien être d'une grande utilité, et nous exposerons précisément une logique à trois valeurs de ce genre, la logique des « événements subordonnés », qui, tout en n'étant qu'une façon de traiter synthétiquement les couples de propositions ordinaires, sert à exprimer dans une forme claire et significative les questions concernant les probabilités subordonnées.

2. — Mais il y a une deuxième possibilité de concevoir les logiques à plusieurs valeurs : même si, en soi, une proposition n'est capable que de deux valeurs, vrai ou faux, c'est-à-dire des deux réponses oui ou non, il peut arriver qu'*un individu* donné *ne connaisse pas* la réponse, du moins à un instant donné ; il y a donc pour un individu une troisième attitude possible en face d'une proposition. Cette troisième attitude ne correspond pas à une troisième valeur distincte du oui et du non, mais simplement au doute entre le oui et le non (comme ces individus, qui faisant l'objet d'indications incomplètes ou illisibles, figurent de sexe « inconnu » dans une statistique, ne sont pas le moins du monde d'un troisième sexe, mais constituent simplement le groupe de ceux dont on ignore auquel des deux sexes possibles ils appartiennent). On peut évidemment, si on le veut, considérer les trois attitudes possibles d'un individu donné par rapport à une proposition comme les trois valeurs possibles d'une logique à trois valeurs, et, en appliquant les considérations précédentes, transformer toute proposition à trois valeurs en deux propositions à deux valeurs ; mais ces deux propositions n'ont de signification qu'en relation avec l'individu considéré, et ne permettraient pas la reconstitution de la proposition d'où l'on est parti. Si, en effet, A est une proposition de la logique ordinaire, et O un individu (considéré à un instant donné),

la proposition A_0 de la logique à trois valeurs envisagée (c'est-à-dire l'entité logique correspondant aux trois réponses « oui », « non », « peut-être », selon que O sait que A est vrai, que A est faux, ou ne sait rien) équivaut aux deux propositions ordinaires O(A) et O(non A), où O(X) = « O sait que la proposition X est vraie ». En effet, les trois valeurs de A_0 — qu'on pourrait appeler : vrai, faux, douteux — correspondent aux trois combinaisons possibles

$$O(A) \text{ et non } O(\text{non } A) = O(A), \quad O(\text{non} A) \text{ et non } O(A) = O(\text{non } A),$$
$$\text{non } O(A) \text{ et non } O(\text{non } A) ;$$

la combinaison O(A) et O(non A) = « O sait que A est vrai et non A aussi » est absurde. Mais une telle logique n'est suffisante que pour caractériser l'attitude actuelle d'un individu : lorsqu'on lui demande si la proposition A est vraie ou fausse et qu'il répond « je ne le sais pas », on considère la question comme tranchée, et le problème qui demeure entier, celui de savoir si A est vrai ou faux, ne peut pas *entrer en ligne de compte*. Pour cette raison, on ne pourrait pas, dans cette logique, reconstituer une entité logique équivalente à A, ni des opérations correspondant aux opérations sur les propositions de la logique à deux valeurs. En effet, la somme logique de deux propositions douteuses peut être soit douteuse, soit vraie ; le produit logique de deux propositions douteuses peut être soit douteux, soit faux (dans ce dernier cas on dit que les deux propositions douteuses sont *incompatibles*).

3. — Par suite, si on ne veut pas se borner à parler des attitudes actuelles d'un individu vis-à-vis d'une proposition, il faut que la logique à trois valeurs avec « douteux » ne soit pas considérée comme la modification qui pourrait se substituer à la logique à deux valeurs; elle ne devrait lui être que *superposée* en considérant les propositions comme capables en soi des deux valeurs « vrai » ou « faux », la distinction de « douteux » n'étant que provisoire et relative à l'individu O considéré. Mais on pourra tenir compte non seulement du fait relatif qu'une proposition est « douteuse » pour O, mais encore du fait subjectif que O est amené à attribuer à cette proposition douteuse un degré plus ou moins grand de « *probabilité* ». J'ai analysé plusieurs fois cette notion subjective de la probabilité et les propriétés qui permettent de représenter ses degrés suivant une échelle continue et ses lois par les règles de la logique correspondante ; de la façon la plus particulièrement commode, qui est univoquement déterminée, on obtient la représentation ordinaire sur le segment (0,1) avec la pro-

priété additive (c'est-à-dire : en satisfaisant le théorème des probabilités totales).

La logique à une infinité de valeurs à laquelle on est ainsi amené, est encore, comme la logique à deux valeurs avec « douteux », une logique *superposée* à la logique à deux valeurs ; on n'a pas de propositions qui ne sont ni vraies, ni fausses, mais probables, et avec un certain degré de probabilité ; on a seulement des propositions vraies ou fausses, mais un individu donné peut ignorer si une proposition est vraie ou fausse, et, dans le doute, il portera sur elle un jugement provisoire qui est représenté numériquement par le degré de probabilité. Les règles de cette logique, qui expriment les principes bien connus du calcul des probabilités et peuvent naturellement être exprimées sous la forme des « Werttafeln » de Reichenbach (1), constituent alors les relations que chaque individu doit sauvegarder dans l'évaluation des probabilités de divers événements (propositions), pour ne pas être *incohérent*, pour ne pas tomber en contradiction avec lui-même. Et précisément, on n'est pas cohérent si la fonction P(A) = « probabilité de la proposition A » n'est pas linéaire ; toutes les fonctions linéaires (c'est-à-dire telles que $P(A+B) = P(A) + P(B)$ si on sait que A.B est faux, ou, en d'autres termes, si A et B sont incompatibles) correspondent par contre à des opinions cohérentes en elles-mêmes, et chaque individu peut avoir la sienne propre.

4. — Pour compléter cet aperçu de la logique formelle de la probabilité, on doit encore considérer les probabilités subordonnées.

On ne considère pas seulement les probabilités P(A), P(B),... de propositions A, B,..., mais on parle couramment de la probabilité « de l'événement A subordonné à l'événement B ». Cette probabilité est une fonction de A et de B, ou, mieux, de A.B et de B, car la probabilité de A en supposant B vérifié, n'est autre chose que la probabilité de A.B, en supposant B vérifié. C'est ici qu'il paraît indiqué d'introduire une logique spéciale à trois valeurs, comme nous l'avions déjà annoncé : A et B étant deux événements (propositions) quelconques, nous dirons *triévénement* A/B (A subordonné à B), l'entité logique qui est considérée : 1° *vraie* si A et B sont vrais ; 2° *fausse* si A est faux et B vrai ; 3° *nulle* si B est faux (on n'a pas de distinction entre « non B et A » et « non B et non A », le triévénement ne devant être fonction que de B et A.B). Les événements ordinaires sont le cas particulier des triévénements pour B = vrai ; introduire la notion de probabilité subor-

(1) O. c., §§ 73-74.

donnée signifie étendre la définition de P(X) du champ des événements X ordinaires au champ des triévénements. On obtient alors le théorème des probabilités composées.

La logique des triévénements est une logique à trois valeurs qui peut être développée dans une analogie parfaite avec la logique à deux valeurs (et cela précisément car les triévénements ne sont que représentations formelles de couples d'événements ordinaires). On peut élargir de la façon suivante les tableaux des opérations logiques ordinaires en considérant la troisième valeur « nulle » :

Négation

A	$-A = \bar{A}$
V	F
N	N
F	V

Somme

$A+B$		A: V	A: N	A: F
B	V	V	V	V
	N	V	N	N
	F	V	N	F

Produit

$A.B$		A: V	A: N	A: F
B	V	V	N	F
	N	N	N	F
	F	F	F	F

Implication

$A \supset B$		A: V	A: N	A: F
B	V	V	V	V
	N	N	N	V
	F	F	N	V

Subordination

A/B		A: V	A: N	A: F
B	V	V	N	F
	N	N	N	N
	F	N	N	N

Les propriétés $-\bar{A} = A$, $A + B = -(\bar{A}.\bar{B})$, $A.B = -(\bar{A} + \bar{B})$, $A \supset B = B + \bar{A} = -(A.\bar{B})$, $A/B = (A.B)/B$, etc., sont toujours satisfaites même dans le nouveau champ.

Pour revenir de la logique des triévénements à la logique ordinaire, il suffit d'introduire les deux opérations T (*thèse*) et H (*hypothèse*) qui décomposent un triévénement X en deux événements T(X) = « X est vrai » et H(X) = « X n'est pas nul » ; les tableaux sont :

X	T(X)	H(X)
V	V	V
N	F	F
F	F	V

Si $X = A/B$ (A et B événements ordinaires), on a $T(X) = A.B$ et $H(X) = B$. En tout cas c'est identiquement $X = T(X)/H(X)$.

5. — Il ne sera pas inutile d'éclaircir ces considérations très abstraites par une illustration qui s'inspire de l'un des schémas qui peuvent servir de base pour la construction de la théorie des probabilités : le schéma des paris (1).

Une proposition ou événement à deux valeurs correspond à un pari qui est fixé de telle façon qu'on ne peut que le gagner ou le perdre. Un triévénement correspond par contre à un pari dont la validité est subordonnée à des conditions qui doivent être vérifiées. On peut

1. Je ne me propose pas de le justifier par les quelques mots que je peux lui consacrer ici, mais seulement de le rappeler ; je l'ai d'ailleurs exposé plusieurs fois, et tout récemment dans mes conférences à l'Institut Poincaré (mai 1935).

parier, par exemple, sur la victoire de l'un des concurrents à une course qui doit avoir lieu demain ; si on entend que le pari est perdu de toute façon si cet événement ne se réalise pas, on est dans le premier cas ; on est dans le second, si on établit que le pari est nul et sans effet si la course ne peut avoir lieu, si le concurrent en question ne peut y participer, ou dans d'autres éventualités quelconques. La « thèse » du triévénement, c'est le cas dans lequel on a établi que le pari est gagné ; l'« hypothèse », le cas dans lequel on a établi que le pari a effet.

La probabilité (subjective) attribuée par l'individu O à un événement A (en général triévénement) est le prix p auquel il considère équitable d'échanger une somme pS pour une somme S dont la possession est subordonnée à la vérification de A (dans le cas du triévénement il faut spécifier encore : le paiement de la mise pS est subordonné à l'arrivée de l'« hypothèse » de A). La probabilité exprime donc les conditions auxquelles on jugerait équitable de parier ; un individu est *cohérent* s'il n'existe pas une combinaison des enjeux qui permette de gagner à coup sûr en pariant avec lui, sur la base des probabilités qu'il a évaluées.

Dans ces considérations, il faut évidemment entendre par événement un fait singulier, une épreuve bien déterminée, non pas un fait d'un type générique dont on pourrait considérer plusieurs épreuves.

6. — Ce rappel du schéma des paris et l'affirmation finale du n° 3, qu'en fait de probabilité chaque individu peut avoir sa propre opinion, pourvu seulement qu'elle soit intrinsèquement cohérente, feront douter que cette notion subjective de probabilité qui peut sembler bien différente et moins solide, corresponde à celle dont la science fait usage et dont elle a besoin. Il suffit d'observer — on dira — que cette probabilité ne dépend pas de l'individu qui l'évalue, mais est la même pour tous.

Mon point de vue est le suivant : il existe (heureusement !) des raisons, subjectives elles-mêmes, qui empêchent, pour une foule de problèmes, que le jugement subjectif ait à différer beaucoup chez divers individus normaux ; dans les cas les plus intéressants s'établit ainsi entre leurs opinions une concordance libre et spontanée, dont la raison peut très bien être approfondie et analysée. Par contre on considère fréquemment que cette concordance est nécessaire, par suite de l'existence d'une évaluation de probabilité objectivement vraie à laquelle se conforme l'opinion des individus qui ne se trompent pas. On ne fait ainsi aucun progrès, au contraire, on empêche toute analyse de la valeur et de la signification de cette concordance en la justifiant d'une façon totalement métaphysique et illusoire, de même qu'en général pour toute « explication » métaphysique qui n'explique rien mais cache les problèmes substantiels et les raisons profondes derrière quelques mots dénués de sens.

Il n'est même pas possible de résumer ici les considérations qui pourraient justifier ce point de vue dans les principaux problèmes de la théorie des probabilités ; je me borne à rappeler que la question pratiquement plus importante des relations entre observations de fréquences et évaluations de probabilités, a été traitée complètement selon ce point de vue en introduisant la notion d'« événements équivalents ».

7. — Cette question de la relation entre probabilité et fréquence est très importante aussi du point de vue logique auquel nous nous plaçons ici, car une interprétation différente de ce point particulier donnerait lieu à une interprétation radicalement diverse de la théorie tout entière (même en laissant inchangé tout son côté formel). On pourrait aboutir aux conceptions qui essaient d'échapper au subjectivisme en s'appuyant essentiellement sur la notion de fréquence ; ce point de vue est très commun, mais il suffira de rappeler, parmi ses partisans, M. Reichenbach, le seul qui ait tâché de le développer logiquement (1).

Il n'admet pas que la probabilité soit attribuée à chaque événement singulier, car le degré de probabilité d'un événement singulier *ne peut pas être vérifié.* On peut par contre vérifier les fréquences successives dans une succession d'événements, et définir la probabilité comme la limite de la fréquence.

Selon mon point de vue, l'objection que la probabilité d'un événement singulier n'est pas vérifiable est dénuée de valeur, car c'est précisément pour cela que la logique du probable n'est pas inutile ; pour parler des faits objectifs la logique ordinaire suffit, pour justifier des prévisions quelconques et des jugements de probabilité ou vraisemblance, toute théorie non-subjective de la probabilité est insuffisante. Une telle théorie ne peut que transposer l'élément subjectif d'un point à l'autre ; si elle cherche à le supprimer, elle se condamne à la stérilité.

Dans les théories identifiant la probabilité avec la fréquence-limite, si l'on ne veut pas déborder dans le subjectif, on n'a que le seul droit de développer des calculs arithmétiques sur les fréquences observées,

(1) Voir ouvrage cité.

et d'établir des relations arithmétiques entre les fréquences futures et entre leurs limites considérées comme des inconnues. Et il n'y aurait alors aucun besoin d'introduire le mot « probabilité » comme synonyme de « fréquence-limite » ; l'introduction de ce mot indique déjà que l'on dépasse par l'imagination l'interprétation arithmétique toute stérile, la seule acceptable avec la prémisse de bannir le subjectif.

Dans la théorie de M. Reichenbach, l'interprétation arithmétique est dépassée par le « Induktionsschluss », c'est-à-dire par la prévision de la fréquence-limite d'après l'observation de la fréquence passée. Cette prévision, comme l'affirme l'auteur lui-même, « ne peut pas être considérée dès maintenant comme vraie ou fausse, mais comme plus ou moins probable ». Après avoir rejeté la probabilité subjective d'événements singuliers, et voulu y échapper en construisant des successions, on est toujours ramené au point de départ, ayant alors à juger de la probabilité d'une proposition singulière relative à la fréquence-limite de ces successions. Si l'on répète le procédé en disposant de nouveau ces événements en successions, et à leur tour les événements singuliers qui en résultent, et ainsi de suite, on obtient des combinaisons de plus en plus complexes, mais on est toujours infiniment loin du but.

Si l'on s'appuie sur des justifications de cet « Induktionsschluss », c'est derrière ce principe et ces justifications que se cachent les éléments subjectifs, car il ne peut pas être *démontré* logiquement. En tout cas, on ne parvient évidemment jamais à déduire logiquement du connu ce qui est inconnu, du passé ce qui appartient à l'avenir.

Enfin, en admettant même la légitimité d'évaluer la fréquence-limite d'après la fréquence observée, ce que l'on rejoindrait alors ne saurait être qu'une conclusion intermédiaire, qui ne constitue pas un but ayant une valeur pratique. En effet, même ceux qui définissent la probabilité comme la valeur limite de la fréquence, appliquent ces notions dans la vie et les exemples pratiques avec le sentiment de justifier ainsi la vraisemblance de certaines prévisions concernant des événements singuliers, ou de combinaisons d'un nombre fini d'événements singuliers (c'est-à-dire encore des événements singuliers). A ce compte, la théorie des probabilités, même pour ceux qui ne l'admettent pas, aurait toujours pour objet la probabilité d'événements singuliers ; ce qui n'est que dissimulé dans la marche des raisonnements critiqués, dans lesquels on substitue aux raisonnements directs sur les probabilités subjectives ainsi définies, des calculs formels sur des entités fictives (fréquences-limites), reliées tant aux prémisses qu'aux conclusions pratiques par des considérations qui ne peuvent être qu'incomplètes lorsqu'on veut en ignorer la valeur subjective.

La limite, en effet, ne peut avoir qu'une valeur fictive, car on ne pourra jamais en dire quoi que ce soit avec certitude (c'est une proposition « unentscheidbar » dans un temps fini !) ; de plus, la rigidité avec laquelle on doit supposer, dans ces théories, les événements singuliers rangés en successions, qui apparaissent douées d'une valeur presque métaphysique, empêche de poser le problème de l'induction en dehors de toute hypothèse schématisée et particulière. Et, même dans le cas le moins défavorable, l'explication des fondements du raisonnement par induction ne peut être qu'insuffisante, ne serait-ce que parce que les hypothèses qu'il serait nécessaire de spécifier sur les probabilités des épreuves singulières d'une même succession et leur interdépendance, ne peuvent être exprimées d'aucune façon lorsqu'on s'interdit de parler d'événements singuliers.

La théorie subjective résoud par contre intégralement le problème, et permet d'énoncer explicitement et d'analyser complètement les diverses hypothèses. Dans le cas correspondant à celui qui est ordinairement considéré dans les théories basées sur la fréquence, ce but est réalisé par la théorie, déjà rappelée, des événements équivalents, qui conduit rigoureusement aux mêmes conclusions généralement admises ou démontrées par des raisonnements vagues et imprécis. Mais toutes les autres hypothèses peuvent être étudiées au même titre.

8. — En conclusion, il y a deux façons possibles de concevoir la signification d'une troisième valeur ou d'une échelle de valeurs intermédiaires entre les valeurs extrêmes « vrai » et « faux » : la conception objective, qui conduit à une logique à plusieurs valeurs effectives ; la conception subjective qui conduit à une logique à plusieurs valeurs, provisoire, superposée à la logique ordinaire à deux valeurs. Cette deuxième théorie, qui est rejetée presque sans discussion par M. Reichenbach, devrait au contraire, d'après les considérations développées ici, apparaître comme la seule capable d'interpréter tous les problèmes de probabilité de la vie pratique et de la science, tandis que toute conception objective, comme celle de la fréquence-limite, ne peut dépasser qu'illusoirement le domaine d'application de la logique ordinaire.