Dott. BRUNO DE FINETTI

Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo.

Estratto dal vol. VII (serie II)
dei *Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma*

ROMA
TIPOGRAFIA DEL SENATO
DEL DOTT. G. BARDI
1931-X

Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo

Di fronte ai risultati della fisica moderna, o, piuttosto, di fronte all'attacco di certe forti correnti di pensiero che rispondono a un atteggiamento essenziale dello spirito contemporaneo e che in quei risultati trovano con ragione dei validi argomenti in appoggio del loro punto di vista, dobbiamo rinunciare al principio di causalità? Dobbiamo rinunciare al determinismo?

La questione è all'ordine del giorno. Per una coincidenza veramente fortunata, è uscito proprio di questi giorni il fascicolo del « Periodico di Matematiche » dove è riassunta la discussione che ebbe luogo su tale argomento a Firenze nell'ultimo Congresso della «Mathesis », e ne sono particolarmente lieto perchè spero così che, nelle loro linee essenziali, le opposte concezioni saranno presenti a tutti. Lasciando a parte il principio d'indeterminazione, di cui non ci avremo a occupare, il contrasto si concentra in un punto solo: nello scegliere fra queste due posizioni:

PRIMA. – *Esistono delle leggi necessarie e immutabili; i fenomeni naturali sono determinati dai loro antecedenti con precisione e con certezza assolute.*

SECONDA. – *Non esistono leggi vere e proprie; le previsioni non possono essere certe, ma soltanto più o meno, e magari immensamente, verosimili o* probabili; *le cosidette leggi naturali non sono che l'espressione di regolarità statistiche.*

Così schematizzato, il contrasto ha un valore ed un senso piuttosto filosofico che fisico, certo assai più soggettivo che oggettivo, come hanno acutamente chiarito, in quelle discussioni di Firenze, i Professori CORBINO ed ENRIQUES. Tuttavia, la scienza può decidere la controversia, e la deciderà. La scienza non ha dimostrato nè avrebbe potuto dimostrare nulla contro il concetto filosofico *a priori* della « quiete assoluta »; ha mostrato però che è praticamente inutile, che fisicamente non c'è bisogno o scopo d'attribuire il nome di « sistema in quiete assoluta » a questo o a quel sistema di riferimento, e da allora anche della quiete assoluta come concetto filosofico non si sente più parlare. Così accadrà, ne sono persuaso, che, quando il principio di causalità sarà diventato inutile per la fisica, anche i filosofi lo relegheranno in compagnia delle altre ipotesi metafisiche e proprietà occulte che NEWTON volle bandite dalla filosofia naturale.

Ma è possibile una scienza senza principio di causalità? Come diceva il POINCARÉ, la scienza è previsione dei fatti. E come mai un fatto si potrà prevedere se ammettiamo appunto che non sia determinato, che possa verificarsi e che possa non verificarsi, che nulla ci autorizzi ad escludere l'una o l'altra di queste due possibilità? Il determinismo non è dunque, come obbiettò a Firenze il PADOA, un presupposto per la possibilità stessa della scienza? Se per scienza si intende scienza razionale, scienza come scopritrice di verità assolute, scienza come logica indefettibile dell'universo, allora tutto ciò è giustissimo, anzi lapalissiano. Ma è una critica esterna all'indeterminismo, significa soltanto che non si può contemporaneamente accettare e rifiutare il determinismo. Rifiutando il determinismo dobbiamo integralmente accettare la seconda delle due posizioni che ho fissato: le previsioni allora non sono più certe, ma soltanto più o meno probabili. Si potrà avere una probabilità tanto grande da meritare il nome di certezza pratica, ma ciò non toglie che sia semplicemente una probabilità.

La novità essenziale nel metodo scientifico sarebbe allora la sostituzione della logica col calcolo delle probabilità; al posto di una scienza razionalistica in cui si deduce il certo dal certo si avrebbe una scienza probabilistica in cui si deduce il probabile dal probabile. Non che per impostare la scienza su queste basi sia pregiudizialmente necessario rinunciare al determinismo: possiamo confessare di non saper prevedere un fatto senza aggiungere che la previsione è per sè stessa impossibile. Possiamo quindi sviluppare la scienza secondo questo indirizzo in modo: 1°) accettabile da chiunque, rinunci o non rinunci al determinismo; 2°) indipendente dal principio di causalità, che risulta allora del tutto inutile. Dal riconoscere inutile all'abbandonare, il passo è – psicologicamente parlando – breve; comunque, interessa la filosofia e non la scienza.

Può rimanere un altro dubbio. I principii stessi del calcolo delle probabilità e le leggi statistiche che se ne deducono, vengono per solito spiegati e giustificati in un modo che, a dire il meno possibile, risente delle convinzioni deterministe di chi li enuncia. Sarà possibile stabilirli e giustificarli rimanendo nel puro ambito delle nuove concezioni? La questione mi sembra molto importante e ho cercato quindi di approfondirla, tanto più che nessuno dei metodi usuali di introdurre la probabilità e dimostrarne le proprietà fondamentali mi è mai apparso soddisfacente. Mi sembra ora d'essere riuscito nell'intento, ma di queste ricerche (tuttora inedite) (1) basti l'avervi fugacemente accennato.

Ammetteremo pertanto senz'altro di poter far uso del calcolo delle probabilità, senza venir meno al nostro proponimento: di inibirci rigorosamente ogni appello al concetto di causalità. Entriamo allora in un campo molto più consistente, in un campo cioè in cui avremo piuttosto a risolvere dei problemi matematici che a vincere pregiudiziali filosofiche.

Le ricerche di cui debbo oggi riferire riguardano appunto un lato, e un lato che mi sembrava particolarmente interessante, di questo problema generale: la traduzione delle leggi deterministe in leggi probabilistiche. Per dirla alla buona, si tratta in generale di sostituire a una legge che dice: «il tale fatto andrà necessariamente così e così» una legge che dice invece «il tale fatto andrà probabilmente e press'a poco così e così»; noi ci occuperemo ora di tale traduzione per il caso delle leggi differenziali (o, in generale, integro-differenziali).

Cercherò di chiarire il senso di tali ricerche piuttosto che d'inoltrarmi nei dettagli analitici della questione; sarà tuttavia oppor-

(1) Mentre era in istampa la presente conferenza furono pubblicati i seguenti lavori su tale argomento: *Probabilismo – Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza*, nella «Biblioteca di Filosofia diretta da A. Aliotta», Perrella ed., 1931, L. 5; «*Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*», Boll. U. M. I., 1930; *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*, Rendic. dei Lincei, 1930 (II Sem.); *Sul significato soggettivo della probabilità*, «Fundamenta Mathematicae» T. XVII; *Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico*, «Atti Soc. Ital. Progr. Scienze» (Congr. 1930, II Vol.).

tuno mostrare come il problema s'imposti matematicamente, tanto perchè sia possibile fissare le idee. E devo quindi richiamare, quanto più brevemente mi sarà possibile, alcune nozioni di calcolo delle probabilità.

Se X è una grandezza di cui non conosciamo il valore, non sappiamo, in generale, se è vero o falso che tale valore sia compreso fra due limiti assegnati ξ_1 e ξ_2. L'ipotesi che ciò avvenga costituisce allora un evento che potrà avere una certa probabilità; se conosciamo tale probabilità relativamente a un qualunque intervallo (ξ_1, ξ_2) diremo di conoscere la *legge di probabilità* della *variabile casuale* X. Tale legge è completamente individuata assegnando la *funzione di ripartizione* $\Phi(\xi)$ che rappresenta la probabilità che sia $X < \xi$: allora infatti la probabilità che X sia compreso fra ξ_1 e ξ_2 è $\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)$. La Φ è ovviamente una funzione reale mai decrescente, tende a 0 per $\xi \to -\infty$ e ad 1 per $\xi \to +\infty$, ed ha quindi al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità, nei quali fa un salto finito; in tali punti le proprietà che abbiamo detto possono non sussistere, ma, dato che sono al più un'infinità numerabile, ciò non dà nessuna noia.

Si dice *valor medio* o *speranza matematica* di X l'espressione

$$\mathfrak{M}(X) = \int \xi d\Phi(\xi) \text{ (integrale di STIELTJES),}$$

che generalizza in modo del tutto naturale la nozione elementare ben nota; in linguaggio meccanico, è il baricentro d'una distribuzione di masse (sull'asse ξ) che rappresenti la probabilità. Se X e Y sono due variabili casuali, si ha sempre

$$\mathfrak{M}(X + Y) = \mathfrak{M}(X) + \mathfrak{M}(Y)$$

e si ha anche

$$\mathfrak{M}(X \cdot Y) = \mathfrak{M}(X) \cdot \mathfrak{M}(Y)$$

se X e Y sono *indipendenti*, ossia se il fatto di supporre noto il valore di X non influisce sulla previsione di Y (e inversamente). Ciò significa, in formule, che, quali si siano ξ ed η, la probabilità che sia contemporaneamente $X < \xi$ e $Y < \eta$ è il *prodotto* della probabilità che sia $X < \xi$ per la probabilità che sia $Y < \eta$.

Si dimostra poi che, se, per ogni valore reale del parametro t, si conosce il valor medio di e^{itX}

$$\psi(t) = \mathfrak{M}(e^{itX}) = \int e^{it\xi}\, d\Phi(\xi),$$

la legge di probabilità $\Phi(\xi)$ rimane completamente individuata; la $\psi(t)$ si dice *funzione caratteristica* della legge di probabilità di X, e costituisce uno strumento potentissimo di calcolo, come ha mostrato il LÉVY, che ha il merito di averne per primo fatto uso sistematicamente. La proprietà essenziale che rende tanto fruttuoso tale concetto è questa: che se $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ sono le funzioni caratteristiche di due variabili casuali *indipendenti* X e Y, la funzione caratteristica della loro somma $X + Y$ è

$$\psi(t) = \psi_1(t) \cdot \psi_2(t).$$

Infatti

$$\mathfrak{M}(e^{it(X+Y)}) = \mathfrak{M}(e^{itX} \cdot e^{itY}) = \mathfrak{M}(e^{itX}) \cdot \mathfrak{M}(e^{itY}).$$

Siamo in grado di comprendere ora chiaramente quale potrà essere lo scopo che ci proponiamo: poichè, nel nostro caso, si tratta di prevedere il valore in un istante futuro λ di una grandezza $X(\lambda)$, variabile in funzione del tempo λ [1], non presumeremo più di determinare il valore che certamente e necessariamente dovrà assumere, ma cercheremo soltanto di determinarne la legge di probabilità, nel senso ora richiamato. Se il tempo avesse un carattere discreto, se cioè ogni intervallo finito di tempo si considerasse come costituito da una successione di istanti in numero finito ($\lambda = 0, 1, 2, \cdots, n$), non avremmo che da studiare un sistema di variabili casuali $X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n$, il che rientra in un tipo di problemi già trattati da tempo. Invece nel nostro caso siamo condotti a un problema di natura molto più elevata, perchè il tempo è una variabile continua, ed è tutto l'andamento della funzione $X(\lambda)$ che è aleatorio. C'è, per usare una chiara analogia, la stessa differenza che fra un problema di differenze finite e un problema di calcolo differenziale. E anche qui, come per impostare i problemi di calcolo differenziale, si tratterà,

[1] Indico il tempo con λ per evitare confusione colla t della funzione caratteristica.

per dirla con parole abbastanza vaghe per non comprometterci: 1°) di trovare il modo di caratterizzare la *legge istantanea* degli incrementi aleatori (analogamente a quanto si fa nel calcolo differenziale mediante le *derivate*); 2°) di riuscire a determinare la legge di probabilità di $X(\lambda)$ in ogni istante λ assegnato quando si conosca, in funzione di tutti gli elementi da cui dipende, la legge istantanea degli incrementi di $X(\lambda)$. È questo il problema centrale della nuova teoria, della teoria delle *funzioni a incremento aleatorio*, come le ho chiamate, ed è perfettamente l'analogo del problema centrale della fisica–matematica determinista, e cioè del problema dell'integrazione delle equazioni differenziali (o anche integro–differenziali).

L'analogia strettissima nell'impostazione concettuale non deve però illuderci: i metodi più spontanei che un criterio di analogia ci suggerirebbe sono assolutamente inapplicabili al nostro caso, che risponde a concetti molto più delicati.

Sembrerebbe ovvia, ad esempio, l'idea di utilizzare la derivata di $X(\lambda)$ per caratterizzarne il comportamento istantaneo. Ciò risulta invece del tutto privo di senso, come accennerò più avanti.

Mi sembra molto utile però, a questo punto, premettere una considerazione critica, che è fondamentale per chiarire le idee. È una cosa semplicissima, ma, a non averne la coscienza esatta, è assai difficile orientarsi, come ne ho fatto io stesso l'esperienza.

La funzione $X(\lambda)$ ha un andamento aleatorio, l'ipotesi che essa soddisfi o non soddisfi una data condizione può risultare, quindi, o vera o falsa, tale ipotesi costituisce pertanto un evento che potrà avere una certa probabilità. Ma perchè ci appaia non privo di senso, empiricamente, il valutare la probabilità di un evento, dobbiamo riconoscere la possibilità, almeno teorica, di verificare sperimentalmente se è vero o falso; questa considerazione conduce a istituire, fra le varie proprietà concepibili di una funzione $X(\lambda)$, una distinzione abbastanza profonda (1). Come tipo di esperimento possibile, consideriamo l'effettuazione di una misura di X in un istante λ comunque fissato, il che è implicito nell'impostazione stessa che s'è abbozzata. Allora l'esperienza possibile più generale consiste nella misurazione di X in un numero finito di istanti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, co-

(1) Cfr. la nota già cit. *Problemi determinati*, ecc. (« Rendic. dei Lincei », 1930).

munque prefissati. Una condizione, una proprietà, della funzione $X(\lambda)$, si dirà una condizione, una proprietà *empirica*, se è possibile predisporre un'esperienza empirica da cui risulti in ogni caso se essa si verifica o non si verifica; in altre parole, si dirà empirica una proprietà se dipende soltanto dalla conoscenza di X in un numero finito di istanti.

Consideriamo ad esempio le cinque condizioni seguenti:

è $X(\lambda) > 0$

1° in un istante λ assegnato (ad esempio $\lambda = 1$);

2° in ogni istante λ d'un intervallo di tempo assegnato (ad esempio $0 < \lambda < 1$);

3° in almeno un istante λ di un intervallo di tempo assegnato (ad esempio $0 < \lambda < 1$);

4° in infiniti istanti della successione $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$

$$\left(\text{ad esempio } \lambda_n = \frac{1}{n}\right);$$

5° o nell'istante λ_1, oppure in infiniti istanti della successione $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \cdots$ $\left(\text{ad esempio } \lambda_n = \frac{1}{n}\right)$ ma non nell'istante λ_2.

La prima è una proprietà empirica. Vogliamo riconoscere se è o non è verificata? Misuriamo la X nell'istante λ, e lo sapremo; potremo cioè in ogni caso rispondere o *Sì* o *No*. La seconda non è una proprietà empirica: qualunque gruppo di misure io eseguisca, in numero finito, non posso mai esser certo che la proprietà sia verificata: non sono mai in grado di dire di *Sì*. Può darsi invece che possa dire *No*: basta che anche una sola delle misure effettuate dia un valore negativo. La terza dà un esempio opposto: qualunque gruppo di misure si eseguisca, può darsi che l'esperienza risponda *Sì*, ma non che risponda *No*. Invece la quarta proprietà sfugge completamente ad ogni controllo effettuabile: nessuna esperienza, qualunque ne sia il risultato, può rispondere nulla, nè *Sì* nè *No*. Il quinto caso infine partecipa insieme del secondo e del terzo; una esperienza può rispondere tanto di *Sì* che di *No*; non si tratta tuttavia di una proprietà empirica perchè, qualunque sia l'esperienza predisposta, può sempre darsi che non risponda nè *Sì* nè *No*.

La prima dà, secondo abbiamo già chiarito, l'esempio di una proprietà empirica; la quarta, che costituisce l'estremo opposto, dà l'esempio di una proprietà *trascendente*. Le altre, per cui l'esperienza può decidere o non decidere se debbano dirsi vere o false, si diranno *semiempiriche*, e precisamente *inferiormente*, *superiormente*, *bilateralmente semiempiriche* a seconda che mediante delle esperienze è possibile trovarle *vere* (come la 3°), è possibile trovarle *false* (come la 2°), oppure sussistono entrambe tali possibilità (come la 5°). Una proprietà P è cioè superiormente semiempirica se esiste almeno una proprietà empirica A tale che $P \supset A$, inferiormente semiempirica se esiste almeno una proprietà empirica B tale che $B \supset P$, bilateralmente semiempirica se ne esistono di entrambi i tipi: $B \supset P \supset A$, trascendente se non si verifica nessuno di questi casi.

Di una proprietà empirica è possibile direttamente determinare la probabilità (perchè ciò è quanto si suppone nel dire che la legge di probabilità di $X(\lambda)$ è *conosciuta*); per le probabilità di proprietà superiormente, inferiormente, bilateralmente semiempiriche potremo quindi fissare rispettivamente un limite superiore, o inferiore, o entrambi, ricordando che se $B \supset A$ la probabilità di B è non maggiore di quella di A. Per una proprietà semiempirica otteniamo un valore ben determinato della probabilità se e soltanto se i limiti inferiori e superiore così determinati coincidono, altrimenti sapremo solo che appartiene a un certo intervallo. Al di là di questa conclusione non è lecito andare: i metodi con troppa facilità generalmente ammessi di passaggio al limite, ogniqualvolta permettono una conclusione più precisa, sono totalmente illusori.

Stabilito tale criterio direttivo, si può passare con sicurezza all'impostazione del problema, altrimenti irta di trabocchetti.

Il caso più semplice, e, come vedremo, fondamentale, da cui conviene prendere le mosse, è quello in cui gli incrementi di $X(\lambda)$ in due intervalli uguali successivi sono indipendenti ed hanno la medesima legge di probabilità. In linguaggio intuitivo, che risulterà meglio giustificato e precisato dal seguito, potremo dire che la legge istantanea degli incrementi di $X(\lambda)$ è *fissa*, indipendente cioè sia dall'istante λ, sia dal valore di X in tale istante o dal suo comportamento anteriore.

Indichiamo $\psi_\lambda(t)$ la funzione caratteristica della legge di probabilità dell'incremento di X in un intervallo di lunghezza λ, cioè dell'incremento $X(l+\lambda)-X(l)$; per l'ipotesi fatta sull'indipendenza di tali incrementi sarà

$$\psi_{\lambda_1+\lambda_2}(t) = \psi_{\lambda_1}(t) \cdot \psi_{\lambda_2}(t)$$

e si deduce che, posto

$$\psi(t) = \psi_1(t) \quad (= \psi_\lambda(t) \quad \text{per} \quad \lambda = 1),$$

è sempre

$$\psi_\lambda(t) = [\psi(t)]^\lambda$$

o anche

$$\log \psi_\lambda(t) = \lambda \log \psi(t) .$$

Lo studio di questo caso particolare – delle *leggi fisse d'incremento aleatorio* – ha una particolare importanza perchè costituisce, come accennavo poc'anzi, il presupposto e il fondamento per lo studio del caso più generale. Infatti, come le funzioni ordinarie sono, in generale, nell'intorno di un dato punto, assimilabili a una funzione lineare, così una legge d'incrementi aleatori è assimilabile, in generale, entro un intervallo sufficientemente piccolo, a una legge *fissa* d'incrementi aleatori. Ad esse, per ovvia analogia, ho dato il nome di *legge derivata*; si potrebbe anche dire *legge istantanea*, perchè risolve appunto il problema che ci eravamo posto di caratterizzare la legge di probabilità degli incrementi nel suo comportamento istantaneo.

Precisando in modo opportuno la definizione di *legge derivata*, di cui s'è ora veduto il senso, si trova facilmente che la sua funzione caratteristica $\psi(t)$ è data dalla formula

$$\log \psi(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} \log \psi_\lambda(t)\right]_{\lambda=0},$$

che rende valida appunto, in prima approssimazione, la $\log \psi_\lambda(t) = = \lambda \log \psi(t)$, dove $\psi(t)$ è la funzione caratteristica dell'incremento $X(\lambda)-X(0)$, ove si assuma come origine $\lambda = 0$ l'istante cui ci si riferisce, e si suppongano noti tutti gli elementi da cui la previsione dipende. Nel caso più generale tali elementi possono essere: l'istante

λ, il valore di X nell'istante λ, e il comportamento di X anteriormente a λ. Con analogia perfetta con le leggi differenziali (o anche integro–differenziali: fenomeni ereditari), dove la previsione di un incremento futuro di $X(\lambda)$ è possibile quando sia noto il presente (o, tutt'al più, anche il passato) (¹). Non c'è altra differenza se non quella, sostanziale, e inerente allo stesso nostro concetto informatore, che si tratta qui di previsioni in senso probabilistico anzichè di previsioni necessarie e precise.

Prima d'accennare al modo in cui questi problemi s'impostano, gioverà spiegare, per chiarire le idee, perchè non s'impostino in modo diverso, che già abbiamo asserito impossibile: considerando cioè le derivate di $X(\lambda)$. Detta in due parole, la ragione intuitiva è questa: dire che una funzione è derivabile significa dire che, entro intervalli abbastanza piccoli, è press'a poco lineare, e quindi che i suoi incrementi in due intervalli uguali successivi contenuti in un intervallo abbastanza piccolo (come gli intervalli $(\lambda - \varepsilon, \lambda)$, $(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ per ε abbastanza piccolo) sono press'a poco uguali (cioè $X(\lambda + \varepsilon) - X(\lambda) \simeq$ $\simeq X(\lambda) - X(\lambda - \varepsilon)$). Invece in un intervallo abbastanza piccolo la legge istantanea di una funzione a incremento aleatorio è assimilabile a una legge fissa, e i due incrementi sono *indipendenti*, ciò che esclude ogni ragione di presumere che abbiano a risultare press'a poco uguali. Naturalmente, questa spiegazione non è che il succo di una dimostrazione perfettamente rigorosa, che precisa opportunamente sia i concetti che le conclusioni.

E veniamo finalmente a quello che ho chiamato già più sopra il problema fondamentale, e che è l'analogo del problema fondamentale della fisica–matematica, del problema cioè dell'integrazione delle equazioni differenziali. Ci limiteremo al caso in cui la previsione non dipende dal passato, ma solo tutt'al più dall'istante λ e dal valore $X(\lambda)$ di X nell'istante λ: questo caso è già molto generale, ed anche, d'altro lato, analiticamente abbastanza trattabile.

Per caratterizzare una legge d'incrementi aleatori che rientri in questo tipo dovremo supporre nota la funzione $f(t; \lambda, \xi)$ che rap-

(¹) Dire che questo sia il caso più generale non è esatto, se si pensa al caso dei sistemi d'equazioni differenziali; dato però che tale generalizzazione non apporta nessun elemento concettualmente nuovo, la precedente asserzione rimane vera purchè s'intenda « il tipo », « lo schema », del caso più generale.

presenta la funzione caratteristica f della legge istantanea degli incrementi di X nell'istante λ e nell'ipotesi che sia $X(\lambda) = \xi$. Come caso particolare, la f potrà non dipendere da λ oppure da ξ oppure nè da λ nè da ξ. Quest'ultima eventualità corrisponde al caso già visto della legge fissa, e, supposto nullo il valore iniziale ($X(0) = 0$), la funzione caratteristica $\psi_\lambda(t)$ di $X(\lambda)$ è allora espressa, come sappiamo, da

$$\log \psi_\lambda(t) = \lambda \log f(t)\,.$$

Se la f non dipende da ξ, si ha ancora una formula analoga

$$\log \psi_\lambda(t) = \int_0^\lambda \log f(t\,;\lambda)\,d\lambda\,;$$

in essa rientra ovviamente la precedente come caso particolare.

Nel caso più generale $\psi_\lambda(t)$ è data dal sistema d'equazioni integrali

$$\begin{cases} \psi_\lambda(t) = \displaystyle\int e^{i\xi t}\,d\Phi_\lambda(\xi) & (\psi_0(t) = 1) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\psi_\lambda(t) = \displaystyle\int e^{i\xi t}\log f(t\,;\lambda\,,\xi)\,d\Phi_\lambda(\xi)\,. \end{cases}$$

È facile anche qui rilevare che quando la f non dipende da ξ, si ricade nella formula precedente: si ha infatti in tal caso

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_\lambda(t) = \log f(t\,;\lambda)\int e^{i\xi t}\,d\Phi_\lambda(\xi) = \log f(t\,;\lambda)\cdot\psi_\lambda(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\psi_\lambda(t) = \log f(t\,;\lambda) \qquad \log\psi_\lambda(t) = \int_0^\lambda \log f(t\,;\lambda)\,d\lambda\,.$$

Se invece f dipende da ξ e non da λ, si ha luogo a studiare un problema importante: l'eventuale esistenza di leggi di probabilità assintotiche, e, quindi di leggi di probabilità invariabili. Si tratta cioè di vedere: 1°) se esiste una funzione caratteristica $\psi(t)$ (una $\psi_\lambda(t)$ indipendente da λ) che soddisfa il sistema; 2°) se accade, anche partendo da condizioni iniziali diverse, che risulti

$\lim_{\lambda \to \infty} \psi_\lambda(t) = \psi(t)$. Il sistema relativo a questo caso si riduce alla sola equazione

$$\int e^{i\xi t} \log f(t\,;\,\xi)\, d\Phi(\xi) = 0 \ ,$$

da cui supponendo ricavata $\Phi(\xi)$ si ha subito

$$\psi(t) = \int e^{i\xi t} d\Phi(\xi) \, .$$

Interesserebbe in particolare concludere che tale legge assintotica, sotto ipotesi abbastanza larghe, è la legge normale di GAUSS, come sembra doversi presumere.