LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI NEL CASO DEI NUMERI ALEATORI EQUIVALENTI

In: «*Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*», Roma, 1933,
Vol. XVIII, Fasc. 3-8, pp. 203-207

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXX

1933 (XI)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1933 (XI)

Matematica (Calcolo delle Probabilità). — *La legge dei grandi numeri nel caso dei numeri aleatori equivalenti.* Nota[1] di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sia $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ una successione di numeri aleatori equivalenti, nel senso spiegato nella Nota precedente[2], di cui proseguiamo la numerazione. Dimostriamo che sussistono, come affermato, la legge dei grandi numeri e la legge forte dei grandi numeri, e che la legge di probabilità (funzione di ripartizione) $\Phi_n(\xi)$ di $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, della media aritmetica cioè di n fra i numeri aleatori equivalenti X_i[3], tende a una legge limite $\Phi(\xi)$.

3. Consideriamo la differenza

$$Y_{n+q} - Y_n = \frac{1}{n+q}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1} + \cdots + X_{n+q}) -$$

$$-\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n+q}(X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{n+q}) -$$

$$-\frac{q}{n(n+q)}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n);$$

essa ha naturalmente speranza matematica nulla $\mathfrak{M}(Y_{n+q} - Y_n) = 0$, e per lo scostamento quadratico medio σ si ha

$$\sigma^2 = \mathfrak{M}(Y_{n+q} - Y_n)^2 = \frac{1}{(n+q)^2} \sum_{1}^{n+q}{}_{ij}\, c_i c_j \mathfrak{M}(X_i X_j)$$

con $c_i = -q/n$ per $i \leq n$ e $c_i = 1$ per $i > n$, da cui, contando le coppie dei diversi tipi possibili e semplificando,

$$\sigma^2 = \frac{q}{n(n+q)}(\mu_2 - m_2).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1933.

(2) *Classi di numeri aleatori equivalenti*, questi «Rendiconti», n. 3-4, sez. VI, 1933, pp. 107-110.

(3) Ricordiamo che, trattandosi di numeri aleatori *equivalenti*, la media di n *generici* tra essi ha sempre la medesima funzione di ripartizione $\Phi_n(\xi)$; considerare i primi n tra gli X_i non costituisce che un'inessenziale semplificazione di scrittura.

Tale formula è sempre valida se μ_2 è finito, ossia se i numeri aleatori X_i hanno finito lo scostamento quadratico medio, essendo in tal caso *a fortiori* finito m_2, che è per proprietà note $\leq \mu_2$. Per la disuguaglianza di Bienaymé–Tchebycheff ne segue che, fissati comunque ε e θ, si può in tal caso fissare n abbastanza grande perchè, comunque grande sia q, la differenza $| Y_n - Y_{n+q} |$ sia inferiore ad ε a meno di casi di probabilità $< \theta$. Ossia: *nel caso considerato sussiste la legge dei grandi numeri.*

Ciò basta a dimostrare, estendendo a questo caso il procedimento del Khintchine [1], che la legge di probabilità $\Phi_n(\xi)$ di Y_n tende a una legge limite $\Phi(\xi)$ per $n \to \infty$; indichiamo infatti con $\Phi'(\xi)$ e $\Phi''(\xi)$ rispettivamente il minimo e il massimo limite di $\Phi_n(\xi)$ per $n \to \infty$, e, fissati ε e θ ad arbitrio, scegliamo n in modo che contemporaneamente

1) sia $\Phi_n(\xi + \varepsilon) < \Phi'(\xi + \varepsilon) + \theta$, e

2) si abbia, qualunque sia q, probabilità minore di θ che risulti $| Y_n - Y_{n+q} | > \varepsilon$.

Osserviamo poi che per avere $Y_{n+q} \leq \xi$ bisogna necessariamente che o sia $Y_n \leq \xi + \varepsilon$ oppure $| Y_n - Y_{n+q} | > \varepsilon$; la probabilità $\Phi_{n+q}(\xi)$ di avere $Y_{n+q} < \xi$ è quindi, per il teorema delle probabilità totali, uguale o minore (essendo le due eventualità compatibili) alla somma della probabilità $\Phi_n(\xi+\varepsilon)$ che $Y_n \leq \xi + \varepsilon$ e della probabilità p_ε che $| Y_n - Y_{n+q} | > \varepsilon$. Per le condizioni poste si ha quindi

$$\Phi_{n+q}(\xi) \leq \Phi_n(\xi + \varepsilon) + p_\varepsilon < [\Phi'(\xi + \varepsilon) + \theta] + \theta = \Phi'(\xi + \varepsilon) + 2\theta$$

da cui

$$\Phi''(\xi) = \max_{n \to \infty} \lim \Phi_n(\xi) \leq \Phi'(\xi + \varepsilon) + 2\theta \quad , \quad \Phi''(\xi) \leq \Phi'(\xi + 0),$$

e quindi

$$\Phi''(\xi) = \Phi'(\xi) = \Phi(\xi)$$

(salvo per i punti di discontinuità, ove il valore di $\Phi(\xi)$ è inessenziale).

Rimane così dimostrato che $\Phi_n(\xi) \to \Phi(\xi)$, e ne consegue per il teorema fondamentale del metodo dei momenti che $m_1, m_2, \cdots, m_n \cdots$ sono i momenti della legge $\Phi(\xi)$:

$$m_h = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^h \, d\Phi(\xi).$$

È interessante osservare che la legge Φ degenera e la probabilità si concentra tutta nel punto $\xi = m_1$ quando e sol quando i numeri aleatori X_i non sono correlati: è questa infatti la condizione necessaria e sufficiente perchè $m_2 = m_1^2$. Usando la terminologia di Cantelli, ciò significa che la

(1) *Sur les classes d'événements equivalents*, « Математический сборник », t. 39, n. 3, 1932.

non–correlazione è condizione necessaria e sufficiente perchè la media di n numeri aleatori equivalenti tenda a un valore costante nel senso del calcolo della probabilità, e che detto valore è in tal caso m_1.

4. Non solo sussiste, nel caso considerato, la legge dei grandi numeri, ma anche la *legge forte* dei grandi numeri. Vale cioè il teorema seguente: *fissati comunque piccoli* ε *e* θ, *si può scegliere* N *in modo che, per ogni* $n > N$ *e per* m *comunque grande, risulti* $< \theta$ *la probabilità che per almeno un numero* $q = 1, 2, \cdots, m$ *sia* $|Y_n - Y_{n+q}| > \varepsilon$.

Si potrebbe cercare la dimostrazione calcolando $n^2 \mathfrak{M}(Y_n - Y_{n+q})^4$ e dimostrando che tale valore è uniformemente limitato rispetto a q per $n \to \infty$, ma i calcoli sarebbero alquanto laboriosi, seppure elementari, e il risultato rimarrebbe stabilito sotto condizioni inutilmente restrittive (esistenza del momento di quart'ordine). Bastano invece le condizioni precedenti (esistenza del momento secondo) per assicurare la convergenza forte, come mostra il ragionamento che segue (applicato dal Khintchine [1] al caso di una successione di eventi, dove però basta la prima metà).

Perchè per nessun numero $q = 1, 2, \cdots, m$ sia $|Y_n - Y_{n+q}| > \varepsilon$ è certamente sufficiente che sia $|Y_h - Y_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ ogni qualvolta

1) h e k siano numeri quadrati compresi tra n ed $n + m$ (più quello immediatamente precedente ad n), e

2) ogni qualvolta h sia un tale numero quadrato, e k sia compreso tra esso e il successivo.

Detti infatti h e k il massimo quadrato non maggiore di n e rispettivamente di $n + q$, si ha allora ovviamente

$$|Y_n - Y_{n+q}| \leq |Y_n - Y_h| + |Y_h - Y_k| + |Y_k - Y_{n+q}| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Da

$$\mathfrak{M}(Y_{n+q} - Y_n)^2 = \frac{q}{n(n+q)}(\mu_2 - m_2)$$

si ha per la disuguaglianza di Bienaymé–Tchebycheff che la probabilità della disuguaglianza

$$|Y_{n+q} - Y_n| > \varepsilon$$

è minore di

$$\frac{\mu_2 - m_2}{\varepsilon^2} \frac{q}{n(n+q)} < \frac{\mu_2 - m_2}{n\varepsilon^2}.$$

Siano $s^2, (s+1)^2, \cdots, (s+d)^2$ i numeri quadrati che interessano ($s^2 \leq n < (s+1)^2, (s+d)^2 \leq n + q < (s+d+1)^2$); perchè per h e k

(1) *Remarques sur les suites d'événements obéissant à la loi des grands nombres*, « Математический сборник », t. 39, n. 3, 1932.

appartenenti a tale insieme di indici sia sempre $|Y_h - Y_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ basta evidentemente che sia $|Y_h - Y_k| < \frac{\varepsilon}{6}$ per $h = s^2, (s+1)^2, \cdots, (s+d-1)^2$ e $k = (s+d)^2$; la probabilità di questa circostanza è, per il teorema delle probabilità totali, minore di

$$\frac{\mu_2 - m_2}{(\varepsilon/6)^2}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(s+d-1)^2}\right] < \frac{\mu_2 - m_2}{(\varepsilon/6)^2} R(s)$$

dove $R(s) = \sum_s^\infty {}_i\, i^{-2}$ è il resto delle serie convergente $\sum_i i^{-2}$.

Passiamo al secondo caso: sia ora $h = (s+c)^2$ $(0 \leq c \leq d)$ e $(s+c)^2 < k < (s+c+1)^2$; poniamo $k = h + r$, e avremo $0 < r \leq 2(s+c)$. La probabilità che sia $|Y_h - Y_{h+r}| > \frac{\varepsilon}{3}$ è minore di

$$\frac{\mu_2 - m_2}{(\varepsilon/3)^2} \frac{r}{h(h+r)} = \frac{\mu_2 - m_2}{(s+c)^2(\varepsilon/3)^2} \frac{r}{(s+c)^2 + r},$$

e quindi la probabilità che detta relazione sia soddisfatta per almeno uno dei valori $r = 1, 2, \cdots, 2(s+c)$ è non maggiore di

$$\frac{\mu_2 - m_2}{(s+c)^2(\varepsilon/3)^2} \sum_1^{2(s+c)} {}_r \frac{r}{(s+c)^2 + r} <$$

$$< \frac{\mu_2 - m_2}{(s+c)^2(\varepsilon/3)^2} \cdot 2(s+c) \frac{2(s+c)}{(s+c)^2 + 2(s+c)} < 4 \frac{\mu_2 - m_2}{(s+c)^2(\varepsilon/3)^2};$$

finalmente, la probabilità che si abbia almeno uno sbalzo

$$|Y_h - Y_{h+r}| > \frac{\varepsilon}{3}$$

in almeno uno degli intervalli da s^2 a $(s+1)^2$, da $(s+1)^2$ a $(s+2)^2, \cdots$, da $(s+d)^2$ a $(s+d+1)^2$, è non maggiore di

$$\frac{4(\mu_2 - m_2)}{(\varepsilon/3)^2}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(s+d)^2}\right] < \frac{4(\mu_2 - m_2)}{(\varepsilon/3)^2} R(s).$$

La probabilità che per almeno uno dei numeri $q = 1, 2, \cdots, m$ sia $|Y_n - Y_{n+q}| > \varepsilon$ è, concludendo, minore di

$$(\mu_2 - m_2) R(s)\left[\frac{1}{(\varepsilon/6)^2} + \frac{4}{(\varepsilon/3)^2}\right] = \frac{72}{\varepsilon^2}(\mu_2 - m_2) R(s),$$

espressione che può rendersi piccola a piacere pur di fissare N (e con ciò s) sufficentemente grande.

Osserviamo in particolare che, nel caso della non-correlazione, Y_n tende quindi a m_1 nel senso del calcolo delle probabilità in modo forte.

In altra Nota a seguito della presente tratteremo di qualche proprietà dipendente dall'altra utile circostanza relativa ai numeri aleatori equivalenti: quella cioè di dar luogo ad eventi equivalenti quando ci si limiti a considerare se il numero X_i soddisfa o non soddisfa una certa qualsiasi limitazione.