ALOCAÇÃO ÓTIMA DE ATIVOS E DERIVATIVOS EM FUNDOS DE PENSÃO VIA PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Luciano da Costa Silva

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

Área de Concentração: **Pesquisa Operacional**
Orientador: **Prof. Dr. Júlio Michael Stern.**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

São Paulo, fevereiro de 2001

Resumo

Neste trabalho, após revisarmos a teoria da decomposição estocástica para problemas de programação estocástica em multiestágios e alguns exemplos de aplicação na literatura, sugerimos um método de construção de árvores de cenários, apresentamos um código Scilab para o algoritmo de decomposição estocástica e um estudo de aplicação à alocação de ativos e opções de venda em um grande fundo de pensões brasileiro.

Abstract

In this work, after we revise the theory of stochastic decomposition for multi–stage stochastic programming problems and some examples of applications from the literature, we suggest a method for construction of scenario trees, present a Scilab code for the stochastic decomposition algorithm and a case study of the allocation problem of assets and put options in a large Brazillian fund.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Stern, pela sugestão inicial e pelas sugestões subsequentes, ao longo do processo que deu origem a este trabalho. É surpreendente observar que tenha tido tempo para acompanhar este trabalho entre tantas atividades que acumula.

Ao amigo França e ao amigo Ari.

Às amigas Heloisa e Cibele, duas das mais doces e íntegras pessoas que conheci.

A Cleide, Suzy e Teresa, milhões de Beijos...

Aos meus pais, Maria de Jesus da Costa Silva e Gilberto da Costa Bastos. O mistério que nos liga a nossos pais é sempre incognoscível... Nessa estranha experiência que é a existência, tive a honra de ter como genitores estas duas maravilhosas e singulares criaturas. Devo a eles, bem ou mal, o que sou hoje. Obrigado, Maria. Obrigado, Gilberto.

Às vezes, da pequenez de nossas vidas, conseguimos vislumbrar uma forma superior e melhor de existência. Meu agradecimento final, e maior, vai a todos os Mestres do Conhecimento, a todos os que dedicaram suas vidas ao aperfeiçoamento da espécie e à compreensão do todo universal. Sem os quais algumas noites de agosto seriam sem dúvida mais frias... A Aristóteles, Spinoza, Ralph Waldo Emerson, Schopenhauer, Albert Einstein, Olavo de Carvalho... Meu Muito Obrigado...

Sumário

Non di manco, perché el nostro libero arbitrio non sia spènto, iudico potere essere vero che la fortuna sia arbitra della metà delle azioni nostre, ma che etiam *lei ne lasci governare l'altra metà, o presso, a noi. Et assomiglio quella a uno di questi fiumi rovinosi, che, quando s'adiramo, allagano é piani, ruinano li arberi e li edifizii, lièvono da questa parte terreno, pongono da quell'altra: ciascuno fugge loro dinanzi, ognuno cede allo impeto loro, sanza potervi in alcuna parte obstare. E bènché sieno cosí fatti, non resta però che i uomini, quando sono tèmpi quièti, non vi potessino fare provvedimenti e con ripari et arigini, in modo che, crescèndo poi, o egli adrèbbono per uno canale, o l'impeto loro non sarèbbe né lìcènzioso né si dannoso. Similmente intervène della fortuna: la quale demonstra la sua potènzia dove non è ordinata virtù a resisterle, e quivi volta li sua impeti, dove la sa che non sono fattili arginie li ripari a tenerla.* [1]

Maquiavel, O Príncipe.

[1]Embora admita ser a Fortuna dona de metade das nossas ações, creio que, ainda assim, nos deixa senhores da outra metade, ou um pouco menos. Comparo a Fortuna a um daqueles rios que, quando enfurecidos, inundam planícies, derrubam casas e árvores, arrastam o solo de um lugar para depositá–lo em outro: diante deles não há quem não fuja, quem não ceda ao seu ímpeto, sem meio algum de lhes obstar. Mas, apesar de ser isso inevitável, nada impediria que os homens, nas épocas tranquilas, construissem diques e canais, de modo que as águas, ao transbordarem de seu leito, corressem para estes canais ou, ao menos, viessem com fúria atenuada, produzindo menores estragos. Fato análogo sucede com a Fortuna, que demonstra todo o seu poderio quando não encontra virtude preparada para resistir–lhe e, então, dirige seus esforços para onde ela sabe não haver nem diques nem barreiras para contê–la.

Capítulo 1

Introdução

Os anos 90 viram surgir como fatos econômicos relevantes o crescimento formidável dos fundos de previdência privada, capazes de gerar prosperidade ou incerteza em remotos lugares de um mundo cada vez mais interdependente, e o associado problema de gerir seus recursos da forma mais eficiente possível, de modo a garantir o bem–estar futuro de seus partipantes e suas famílias. No Brasil, em especial, onde muito destes benefícios tornaram–se direitos garantidos por lei, sem que houvesse, em muitos casos, a correspondente garantia de recursos para supri–los, muitos destes fundos de pensão encontram–se em situação difícil ou até mesmo desconhecida.

Com a estabilidade econômica desfrutada pelo país, tornou–se clara e necessária a busca da eficiência microeconômica em todos os setores da economia. E a administração dos fundos de pensão, estatais ou privados, não constitui, certamente, exceção a esta regra. A intenção deste trabalho é apresentar uma contribuição ao objetivo de melhor administrar os recursos sob responsabilidade de um fundo de pensões, de modo a garantir a seus associados o melhor retorno no futuro.

Para tanto, fazemos uso da Programação Estocástica, área já tradicional da otimização e visão original de George B. Dantzig, que, quando aplicada à alocação de ativos ligados a um fluxo de desencaixes, é também conhecida como *Asset Liability Management* (*ALM*).

Após esta introdução, apresentamos no capítulo 2 exemplos de utilização da programação estocástica que julgamos relevantes, incluindo uma breve digressão sobre expansão de capacidade energética, outra área na qual a programação estocástica tem sido largamente utilizada. No capítulo 3 apresentamos a teoria do algoritmo de decomposição estocástica, método que escolhemos para resolver o problema de otimização resultante da modelagem, bem como um código que o implementa. No capítulo 4 apresentamos alternativas para a construção de árvores de cenários, e no capítulo 5 aplicamos estas ferramentas ao estudo de um grande fundo de pensões brasileiro.

1.1 Programação Estocástica

Em um problema de programação estocástica genérico, um agente se encontra no tempo $t = 1$ e depara-se com a perspectiva de tomar uma sequência de decisões $x_1, x_2, \ldots, x_H$, em uma sequência de datas futuras, rotuladas $t = 1, \ldots, H$ e separadas por intervalos de tempo Δ_t. Tais decisões dependem de uma sequência $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_H)$ de variáveis aleatórias que descreverão as condições do ambiente de decisão no tempo t. A complexidade do problema deriva do fato de que, para tomar a decisão em $t = 1$, o agente deve levar em consideração não apenas o estado do seu ambiente neste momento e nem somente os possíveis estados do mundo nos tempos subsequentes, mas também qual seria sua reação (decisão) a cada um destes estados, dada a história passada do processo:

$$\boxed{\text{Observação de } \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_t \longrightarrow \text{ decide } x_t \longrightarrow \text{ estados futuros } \omega_{t+1}, \ldots, \omega_H}$$

Para precisar este problema em termos matemáticos, denotemos a história do processo estocástico ω até o tempo t por $\omega^t = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t)$. Analogamente, o processo de decisão possui um histórico $x^t(\omega^t) = (x_1, x_2(\omega^2), \ldots, x_t(\omega^t))$. Cada conjunto de decisões $x(\omega) = x^H(\omega^H)$ tomadas sob um certo cenário ω trará para o agente um certo custo $F(\omega, x)$. Seu objetivo será minimizar a esperança deste custo sob certas restrições $R_t(\omega^t, x^t) = b_t(\omega^t)$, em cada estágio:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1 \ldots x_H(\omega)} \mathbb{E}_\omega F(\omega, x) \\ &\text{s.t. } R_t(\omega^t, x^t) = b_t(\omega^t)\,,\ \forall\, \omega \in \Omega,\ t = 1 \ldots H. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Naturalmente, não temos muita liberdade para especificar a forma das restrições, pois qualquer modelagem mais arrojada acaba por tornar o problema computacionalmente difícil ou inviável. A maior parte da literatura em programação estocástica trata de uma classe de problemas onde as restriçoes são da forma

$$T_t(\omega^t) \cdot x_{t-1} + W_t(\omega^t) \cdot x_t = b_t(\omega^t) \tag{1.2}$$

ou seja, lineares, onde a decisão em um estágio depende no máximo da decisão tomada no estágio anterior. Com este tipo de restrições, queremos minimizar a esperança do custo total $\mathbb{E}_\omega F(\omega, x) = \mathbb{E}\left[f_1(x_1) + f_2(\omega^2, x_2(\omega^2)) + \cdots + f_{H-1}(\omega^{H-1}, x_{H-1}(\omega^{H-1})) + f_H(\omega^H, x_H(\omega^H)) \right]$, ou seja:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1} & f_1(x_1) + \mathbb{E}_{\omega_2}\,[\min\limits_{x_2(\omega^2)} f_2(\omega^2, x_2(\omega^2)) + \cdots + \mathbb{E}_{\omega_H|\omega^{H-1}}\,[\min\limits_{x_H(\omega^H)} f_H(\omega^H, x_H(\omega^H))\,]\cdots] \\
\text{s.t:} & \\
& \begin{array}{lcl}
W_1 x_1 & = & b_1 \\
T_2(\omega^2)x_1 + W_2(\omega^2)x_2(\omega^2) & = & b_2(\omega^2) \\
\qquad T_3(\omega^3)x_2(\omega^2) + W_3(\omega^3)x_3(\omega^3) & = & b_3(\omega^3) \\
\qquad\qquad \ddots & & \vdots \\
\qquad\qquad\qquad T_H(\omega^H)x_{H-1}(\omega^H) + W_H(\omega^H)x_H(\omega^H) & = & b_H(\omega^H) \\
x_1, x_2(\omega^2), \ldots, x_{H-1}(\omega^{H-1}), x_H(\omega^H) \;\geq\; 0,\ \forall\omega\in\Omega. & &
\end{array}
\end{array}
\tag{1.3}
$$

Além disto, trataremos neste texto apenas dos modelos com funções objetivo lineares, ou seja, com $f_t(\omega^t, x_t(\omega^t)) = c_t(\omega^t)\cdot x_t(\omega^t)$.

A equação (1.3) é chamada *equivalente determinístico* do problema de otimização estocástica. Se definirmos

$$
\mathcal{Q}_{t+1}(x_t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\omega_{t+1}|\omega^t}\,[\min_{x_{t+1}} c_{t+1}(\omega^{t+1})x_{t+1} + \cdots + \mathbb{E}_{\omega_H|\omega^{H-1}}\,[\min_{x_H} c_H(\omega)x_H\,]\,], \tag{1.4}
$$

podemos formular o problema (1.3) como uma sequência recursiva de problemas não lineares:

$$
\begin{aligned}
Q_t(x_{t-1}, \omega^t) = \min_{x_t}\ & c(\omega^t)x^t + \mathcal{Q}_{t+1}(x^t, \omega^t), \\
\text{s.t. } & T_t(\omega^t)\cdot x_{t-1} + W_t(\omega^t)\cdot x_t = b_t(\omega^t),
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

$$
\mathcal{Q}_{t+1}(x^t, \omega^t) = \mathbb{E}_{\omega_{t+1}|\omega^t}\,[\,Q_{t+1}(x^t, \omega^{t+1})\,]. \tag{1.6}
$$

Esta formulação é conhecida como *formulação dinâmica* do problema (1.3). As funções $\mathcal{Q}_{t+1}(x^t, \omega^t)$ são chamadas *funções de recurso.* A interpretação da equação (1.5) é direta: em cada estágio do processo, o agente deve tomar sua decisão condicionado à decisão no estágio anterior, à história passada do processo estocástico subjacente e às restrições do estágio, buscando minimizar tanto o custo corrente quando a expectativa de custos futuros. Note–se ainda o caráter interdependente deste sistema de subproblemas: a solução em um estágio depende tanto das soluções dos estágios passados quanto das soluções dos estágios futuros.

1.2 Modelagem por Cenários

Na introdução acima consideramos que cada cenário ω pertence a um espaço de amostragem genérico, Ω. Usualmente, $\Omega = \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$, de modo que ω é um processo estocástico em $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B})$, sendo $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel para $\mathbb{R}^m$ (a menor σ-álgebra contendo os intervalos de $\mathbb{R}^m$).

Para implementar um modelo de *ALM*, contudo, utilizamos sempre um espaço de cenários discretizado, com uma estrutura de árvore: em cada estágio t, ω_t assume valores em um conjunto finito, $\Omega_t = \{1, \ldots, K_t\}$.

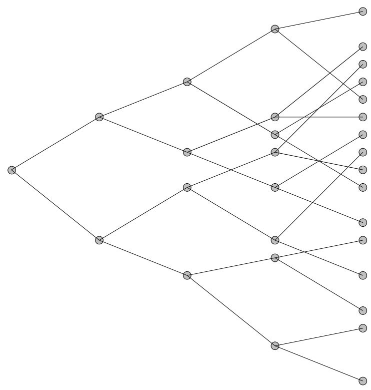


Figura 1.1: Discretização do espaço de cenários: árvore não recombinante.

Um par (t, k), com $k = 1, \ldots, K_t$ passa então a ser chamado um *nó* da árvore. Além disto, se para cada $t = 1, ..., H$ definirmos o conjunto de *descendentes* de um estado k no tempo t:

$$desc(k) = \{j \in \Omega_{t+1} \,|\, P(\omega_{t+1} = j | \omega_t = k) > 0\}$$

então Ω_{t+1} é a união disjunta de $desc(k)$, $k \in \Omega_t$. Esta exigência implica em uma estrutura conhecida como *árvore não recombinante*: cada nó tem um e apenas um antecessor, $a(t, k) = (t-1, \hat{k})$, com exceção do nó $(1, 1)$. Uma consequência disto é que ω_t e ω^t estão identificados um a um, e, portanto, podemos substituir ambos pelo índice k, quando não houver ambiguidade sobre a que tempo nos referimos, e por k_t quando necessitarmos explicitá-lo.

A construção de uma árvore de cenários apropriada aos objetivos que se têm em mente tem sido preocupação constante de boa parte da pesquisa em programação estocástica e outras áreas que se utilizam de cenários para modelar o futuro. No nosso trabalho, trataremos deste problema no capítulo 4.

1.3 Teoria Clássica dos Fundos de Pensão

Em Daykin, Pentikäinen e Pesonen [23] ou Bowers *et al.* [6] pode–se encontrar uma excelente descrição da teoria tradicional dos fundos de pensão. Resumimos aqui os aspectos essenciais desta teoria. [1]

Começaremos por esboçar os fundos de pensão analisando os *fluxos de populações* envolvidos. Considerando que todos os participantes do fundo se dividem entre *contribuintes* e *beneficiários*, teremos 3 fluxos principais a tratar: o de novos contribuintes, o de contribuintes que se tornam beneficiários e o de beneficiários que se desligam do fundo (figura 1.2).

Usaremos a seguinte notação para cada um destes fluxos: $l(t_e, x_e)$ para novos contribuintes na data t_e com idade x_e (diremos também que tal grupo forma uma *coorte*); $n(t_e, x_e, t)$ para o número de contribuintes da coorte (t_e, x_e) que passam à condição de beneficiários na data t; $m(t_e, x_e, t_a, t)$ para os membros da coorte (t_e, x_e) que passaram a beneficiários na data t_a e deixam o fundo na data t.

A partir destas, definimos também as variáveis $L(t_e, x_e, t)$ e $N(t_e, x_e, t_a, t)$ como sendo, respectivamente, o número de membros da coorte (t_e, x_e) que permanecem na condição de contribuintes até a data t e o número total de membros da coorte (t_e, x_e) que se tornaram beneficiários na data t_a e continuam nesta condição até a data t. Pelas definições dadas acima, segue que as variáveis de fluxo, l, n, m, e as de *estoque*, L, N devem satisfazer:

$$L(t_e, x_e, t_e) = l(t_e, x_e) \tag{1.7}$$

$$L(t_e, x_e, t) = L(t_e, x_e, t-1) - n(t_e, x_e, t) \tag{1.8}$$

[1] Como tantas áreas da matemática pura e aplicada, o planejamento de planos de pensão praticamente teve início com o matemático Carl Friedrich Gauss, que avaliou o plano de pensão do quadro docente da Universidade de Göttingen por uma técnica similar à descrita aqui e depois seguida por atuários dos séculos XIX e XX.

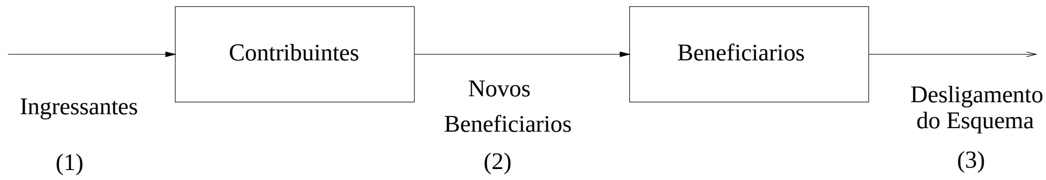


Figura 1.2: fluxo de populações em um fundo de pensões.

$$N(t_e, x_e, t_a, t_a) = n(t_e, x_e, t_a) \tag{1.9}$$

$$N(t_e, x_e, t_a, t) = N(t_e, x_e, t_a, t-1) - m(t_e, x_e, t_a, t) \tag{1.10}$$

Nosso próximo passo é dividir os beneficiários em classes de benefícios, o que nos levará a classificar também os membros que se desligam do fundo, devido ao acoplamento explicitado na equação (1.9). Desta forma, as variáveis N, n e m ganham índices: N_b, n_b, m_b, que indicam a classe do benefício em questão. Aqui consideramos 4 classes de benefícios: $b = 1$ para pensão em caso de morte; $b = 2$ para aposentadoria por invalidez; $b = 3$ para ressarcimento por abandono do fundo; $b = 4$ para aposentadoria normal (por idade ou tempo de serviço). As equações (1.7) a (1.10) tornam-se, portanto:

$$L(t_e, x_e, t_e) = l(t_e, x_e) \tag{1.11}$$

$$L(t_e, x_e, t) = L(t_e, x_e, t-1) - \sum_{b=1}^{4} n_b(t_e, x_e, t) \tag{1.12}$$

$$N_b(t_e, x_e, t_a, t_a) = n_b(t_e, x_e, t_a),\ b = 1, 2, 3, 4. \tag{1.13}$$

$$N_b(t_e, x_e, t_a, t) = N_b(t_e, x_e, t_a, t-1) - m_b(t_e, x_e, t_a, t),\ b = 1, 2, 3, 4. \tag{1.14}$$

Note que a equação (1.8) continua valendo se definirmos:

$$n(t_e, x_e, t) = \sum_{b=1}^{4} n_b(t_e, x_e, t). \tag{1.15}$$

Consideremos agora os *fluxos financeiros* gerados por estas populações. O estoque de beneficiários, $N_b(t_e, x_e, t_a, t)$, gera um fluxo de pagamentos ao longo do tempo. Se o benefício do tipo b, pago no tempo t a um indivíduo da coorte (t_e, x_e), como consequência de um evento ocorrido no tempo t_a (por exemplo, o evento em questão pode ser a aposentadoria do indivíduo por tempo normal), vale $H_b(t_e, x_e, t_a, t)$, então o total de obrigações no ano t devido a este benefício é

$$x_b(t) = \sum_{t_e, x_e, t_a} N_b(t_e, x_e, t_a, t) \cdot H_b(t_e, x_e, t_a, t) \tag{1.16}$$

Se considerarmos ainda que as despesas gerais, $E(t)$, do negócio (salários, impostos, despesas operacionais, etc.) também contribuem para os gastos do período, teremos um total de obrigações de

$$x(t) = \sum_b x_b(t) + E(t) \tag{1.17}$$

Por outro lado, se os membros de cada coorte (t_e, x_e) pagam uma contribuição, $c(t) \cdot S(t_e, x_e, t)$, proporcional ao seu salário, $S(t_e, x_e, t)$, no tempo t, teremos uma receita de

$$y(t) = \sum_{t_e, x_e} L(t_e, x_e, t) \cdot c(t) \cdot S(t_e, x_e, t). \tag{1.18}$$

Geralmente, nas análises teóricas, considera-se que o benefício $H_b(t_e, x_e, t_a, t)$ depende da contribuição passada do indivíduo ao fundo. Uma possibilidade (ver Daykin *et al.*, [23]) é a que segue: supõe-se que a parcela inicial do benefício dependa do valor das últimas contribuições:

$$H_b(t_e, x_e, t_a, t_a) = f_b(t_a - t_e) \cdot S_b(t_e, x_e, t_a) \tag{1.19}$$

onde $f_b(t_a - t_e)$ é uma fração que depende do tempo de contribuição — podendo inclusive ser uma constante — e $S_b(t_e, x_e, t_a)$ é uma função das últimas contribuições, por exemplo, uma média:

$$S_b(t_e, x_e, t_a) = \frac{1}{k} \cdot \sum_{h=0}^{k-1} S(t_e, x_e, t_a - h) \tag{1.20}$$

(Daykin, Pentikäinen e Pesonen [23] sugerem $k = 3$ ou 5; esta média pode também ser ponderada por fatores de desconto dos períodos correspondentes). A seguir, cada parcela seguinte do benefício é calculada a partir da anterior por meio de um fator g_b:

$$H_b(t_e, x_e, t_a, t) = g_b(t_a, t) \cdot H_b(t_e, x_e, t_a, t-1) \tag{1.21}$$

Os fatores f_b e g_b são características do plano. Por exemplo, a função g_b pode ser simplesmemte $g_b(t_a, t) = g_b^{t-t_a}$. Já os salários precisam ser modelados de forma consistente com o que ocorre na realidade. Uma alternativa é separar a variação do salário em dois índices: o de crescimento na carreira, s, característico da população cliente, e o de correção dos valores monetários, I:

$$S(t_e, x_e, t) = S(t_e, x_e, t_e) \cdot \left[\frac{s(x)}{s(x_e)}\right] \cdot \left[\frac{I(t)}{I(t_e)}\right] \tag{1.22}$$

onde $x = x_e + (t - t_e)$ é a idade de um indivíduo da coorte (t_e, x_e) no tempo t.

A análise clássica de fundos de pensão consiste em estimar os valores futuros de $x(t)$ e $y(t)$ e trazê–los a valor presente. Introduzem-se para isto mais duas variáveis: a taxa de desconto de um período, $\nu(t)$, e a probabilidade $p(x)$ de sobrevivência de um período, na idade x. A seguir, calcula–se o valor das obrigações futuras trazidas a valor presente geradas por um benefício:

$$X_b(t_e, x_e, t_a) = \sum_{h=0}^{\infty} H_b(t_e, x_e, t_a, t_a + h) \cdot \nu(t_a, t_a + h) \cdot p(x_a, x_a + h) \tag{1.23}$$

onde $x_a = x_e + (t_a - t_e)$ é a idade do indivíduo da coorte (t_e, x_e) no tempo t_a, $\nu(t_a, t_a + h) = \nu(t_a) \cdot \nu(t_a + 1) \cdots \nu(t_a + h)$ e $p(x_a, x_a + h) = p(x_a) \cdot p(x_a + 1) \cdots p(x_a + h)$. O valor das obrigações futuras geradas pela população inteira no tempo t_a é

$$w(t_a) = \sum_{t_e, x_e} n_b(t_e, x_e, t_a) \cdot X_b(t_e, x_e, t_a) \tag{1.24}$$

A seguir, consideram-se todos os $w(t_a)$ desde uma data inicial $t_0 < t$ até um horizonte de tempo $t_{max} > t$ (ou seja, considera-se o custo total gerado por eventos do passado e que ainda virão a ocorrer no futuro) e os traz a valor presente:

$$W_b(t) = \sum_{t_a = t_0}^{t_{max}} w_b(t_a) \cdot \nu(t, t_a) \tag{1.25}$$

Calculam-se ainda as receitas futuras e são trazidas a valor presente:

$$W_S(t) = \sum_{t_e, x_e, h} L(t_e, x_e, t + h) \cdot c(t + h) \cdot S(t_e, x_e, t + h) \cdot \nu(t, t + h) \tag{1.26}$$

e o valor das despesas futuras trazidas a valor presente: $W_E(t)$. O saldo destas variáveis fornece o *valor presente das obrigações futuras*

$$V(t) = \sum_b W_b(t) + W_E(t) - W_S(t) \tag{1.27}$$

que deve ser compensado pelo retorno dos ativos ao longo do tempo, $A(t)$. Esta comparação fornece o critério para decidir se o fundo é auto–financiável, dada a taxa de contribuição, $c(t)$, e as condições do contrato (equações 1.19 e 1.21).

Os fluxos de populações aqui são considerados determinísticos: $l(t_e, x_e)$, $n_b(t_e, x_e, t)$ e $m_b(t_e, x_e, t_a, t)$ são estimados para o futuro a partir de médias e tendências históricas.

Uma variante da abordagem clássica é permitir que l, n_b e m_b flutuem estocasticamente segundo uma certa distribuição ou seguindo um processo de Markov. Neste caso, uma alternativa é estimar a evolução destas quantidades por meio de *micro–simulações*: a trajetória de cada participante é simulada e os resultados individuais são posteriormente agregados para se obter um modelo de encargos futuros. Esta é a abordagem utilizada por Pereira, Nakano e Stern [54].

Se a população do fundo for suficientemente grande, a variância relativa destes encargos totais será pequena, em comparação com a média, e pode até ser considerada constante. É o que acontece no caso que descrevemos no capítulo 5.

Capítulo 2

Exemplos

2.1 Elementos dos Modelos de *ALM*

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de aplicação da programação estocástica que julgamos relevantes. Neles, observamos alguns elementos comuns de um modelo de ALM:

1. *Modelagem dos cenários econômicos.* Geralmente feito com séries temporais.

2. *Modelagem do passivo do fundo.* Geralmente é necessário modelar os benefícios a pagar em cada período, B_t^k, e as reservas matemáticas (total estimado de benefícios futuros), L_t^k.

3. *A função objetivo a ser minimizada.*

4. *As restrições.* Geralmente, há quatro tipos:

    (a) *Equação de equilíbrio de fluxo de caixa:* Como em (2.1).

    (b) *Equação de atualização do estoque de ativos:* Como em (2.2).

    (c) *Equações do fundo:* Adaptam o modelo ao problema em estudo.

    (d) *Equações terminais:* São as que especificam condições no horizonte $t = H$.

Na figura 2.1 ilustramos estas e outras características da modelagem estocástica.

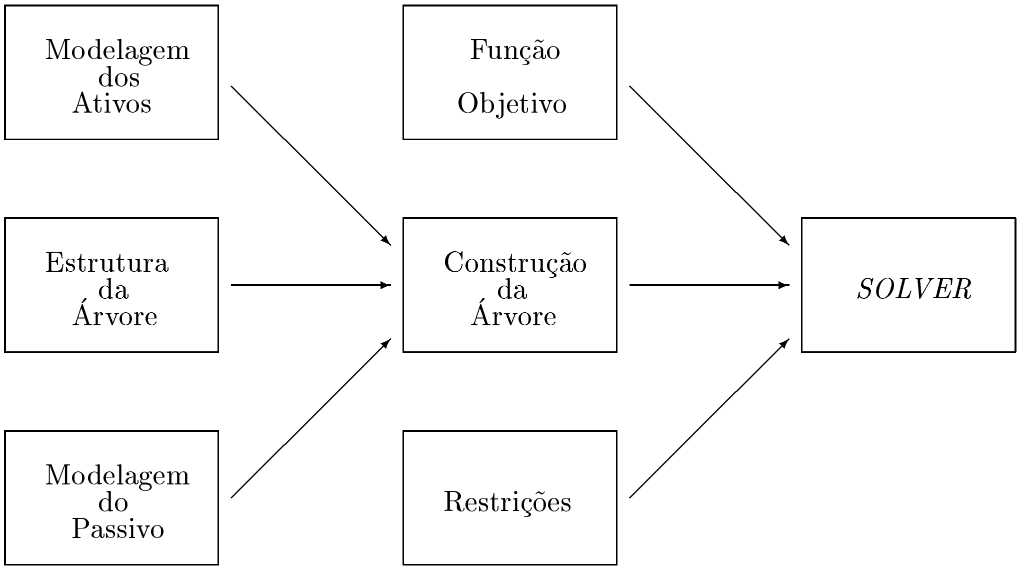


Figura 2.1: Etapas da modelagem estocástica.

2.2 Kouwenberg (1998)

Em [48] temos um modelo simples de programação estocástica para fundo de pensões. Neste modelo, o investidor tem opções de investimento em I ativos, com taxas de retorno estocásticas r_{it}^k, podendo também optar por aplicar em um papel de renda fixa com taxa de retorno r_t^k, ou tomar emprestado a uma taxa q_t^k. Além disso, recebe contribuições dos participantes do fundo, calculadas como uma percentagem cr_t^k da massa de salários S_t^k. Com estes recursos, deve pagar benefícios, B_t^k, no tempo t e outras obrigações, totalizando L_t^k. As variáveis de decisão são: os vetores xb_t e xs_t de compra e venda de ativos, mais um vetor xh_t com as quantidades possuidas de cada ativo no começo do período t; a aplicação y_t em renda fixa, no começo do período t; o montante z_t devido em empréstimos, no começo do período t. Cada operação de compra ou venda paga uma taxa proporcional ao valor de compra, $\gamma_i^b \cdot xb_{it}^k$, ou de venda, $\gamma_i^s \cdot xs_{it}^k$.

Com estas definições, tem-se a seguinte equação de *equilíbrio de caixa:*

$$(1+r_t^k)\, y_{t-1}^{\hat{k}} - (1+q_t^k)\, z_{t-1}^{\hat{k}} + z_t^k - y_t^k + \alpha_t^s \cdot xs_t^k - \alpha_t^b \cdot xb_t^k + cr_t^k \cdot S_{tk} - B_t^k = 0, \tag{2.1}$$

onde $\alpha_t^b = (1+\gamma_{1t}^b, ..., 1+\gamma_{It}^b)$ e $\alpha_t^s = (1-\gamma_{1t}^s, ..., 1-\gamma_{It}^s)$. O significado desta equação é claro: o investidor dispõe, em cada estágio, de recursos provenientes de contribuições ao fundo, venda de ativos e depósitos em renda fixa. Deve utilizá-los para comprar ativos, pagar empréstimos, investir em renda fixa ou pagar benefícios, B_t^k. Após a realização destas operações, o saldo é nulo.

Além disto, as variáveis de compra, venda e estoque de ativos estão ligadas pela equação de *atualização de estoques*:

$$-(1+r_{it}^k)\, xh_{i,t-1}^{\hat{k}} + xh_{it}^k + xs_{it}^k - xb_{it}^k = 0. \tag{2.2}$$

Ao fim de cada período, o valor total dos ativos é:

$$A_t^k = \rho_t^k \cdot xh_{t-1}^{\hat{k}} + (1+r_t^k) \cdot y_{t-1}^{\hat{k}} - (1+q_t^k) \cdot z_{t-1}^{\hat{k}} \tag{2.3}$$

onde $\rho_t^k = (1+r_{1t}^k, ..., 1+r_{It}^k)$.

Nos modelos para fundos de pensão devemos acrescentar ainda as restrições características desse tipo de negócio. No citado modelo de Kowenberg, acrescenta–se a exigência de solvência do fundo: o total de ativos deve atingir uma fração mínima, F^{min}, do total de obrigações, L_t^k. Se não, uma *contribuição emergencial* é feita pelo patrocinador do fundo. Constará do objetivo do problema minimizar a expectativa do total destas contribuições. No horizonte temporal do problema, o tempo T, a *razão de financiamento* deve ser $\geq\ F^{end}$. O déficit é suprido com uma contribuicão dos participantes do fundo:

$$A_t^k + Z_t^k \geq F^{min} L_t^k, \quad t = 1, ..., T-1. \tag{2.4}$$

$$A_T^k + cr_T^k S_T^k \geq F^{end} L_T^k, \quad k = 1...K_T. \tag{2.5}$$

A seguir, temos as restrições sobre a faixa de variação das taxas de contribuição. Restringir a *variabilidade*, além do risco, é um dos objetivos de todo fundo de pensões.

$$cr^{lo} \leq cr_t^k \leq cr^{up} \tag{2.6}$$

$$dcr^{lo} \leq cr_t^k - cr_{t-1}^{\hat{k}} \leq dcr^{up} \tag{2.7}$$

Também usuais são as restrições legais ou corporativas aos máximos e mínimos para a participação de cada classe de ativos na carteira:

$$w_j^{lo} \sum_{i=1}^{I} xh_{it}^k \ \leq\ xh_{jt}^k \ \leq\ w_j^{up} \sum_{i=1}^{I} xh_{it}^k \tag{2.8}$$

O vetor de decisões em cada estágio é $x_t^k = \left[xh_t^k \ xb_t^k \ xs_t^k \ y_t^k \ z_t^k \ cr_t^k \ Z_t^k \right]'$. A função objetivo escolhida por Kowenberg abrange a expectativa das contribuições totais por parte dos participantes e das contribuições emergenciais por parte dos patrocinadores do fundo:

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K_t} \frac{cr_t^k}{K_t} + \lambda \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K_t} \frac{1}{K_t} \left(\frac{Z_t^k}{L_t^k} \right)^2 \tag{2.9}$$

Para continuar no contexto de programação linear, podemos usar como alternativa

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K_t} \frac{cr_t^k}{K_t} + \lambda \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{K_t} \frac{1}{K_t} \cdot \frac{Z_t^k}{L_t^k} \tag{2.10}$$

O autor poderia ter incluído também alguma medida de variabilidade (ou, equivalentemente, de *estabilidade*) do fundo, como, por exemplo, $\sum_t \sum_k |cr_t^k - cr_{t-1}^{\hat{k}}|/K_t = \sum_t \sum_k w_t^k/K_t$, com $w_t^k \geq cr_t^k - cr_{t-1}^{\hat{k}}$, $w_t^k \geq cr_{t-1}^{\hat{k}} - cr_t^k$. Os parâmetros utilizados na modelagem são exibidos nas tabelas 2.2–2.3.

Na implementação do modelo, Kouwenberg exclui a categoria *depósitos*, para limitar o tamanho do problema. A estrutura de ramificação da árvore é 1–10–6–6–4–4 (ou seja, o primeiro nó tem 10 descendentes, cada um destes tendo 6 descendentes, e assim por diante), totalizando 5760 cenários e 7631 nós (68679 restrições e 83941 variáveis, sem contar as de folga). Note–se, porém, que Kouwenberg acaba abdicando das restrições (2.8), segundo indica a tabela 2.3.

A cada nó precisa ser associado um vetor contendo: retorno dos ativos no período em questão, massa salarial, total de benefícios pagos no perído e total de obrigações futuras do fundo. A técnica utilizada para atribuir valores deste vetor a cada um dos nós da árvore é a amostragem simples. Kouwenberg usa um algoritmo de ponto interior especializado em larga escala ([36]), relatando tempo total de resolução de 298 segundos (5min) em uma Sun Sparcstation.

O artigo [48] na verdade compara os resultados do modelo de *ALM* resolvido desta maneira *versus* com a técnica de construção de árvore de cenários pelo ajuste dos momentos. Os resultados neste último caso são mais “razoáveis”, segundo Kouwenberg, resultando em menor variação na alocação ao longo dos cenários e uma alocação inicial de 37% em títulos, 30% em imóveis e 33% em ações. Na primeira técnica, além de obter uma variação maior da alocação, o algoritmo aloca tudo inicialmente em ações.

$$
\begin{array}{lclll}
\ln(1+wages_t) & = & 0.018 & + & 0.693 \cdot \ln(1+wages_{t-1}) + \epsilon_{1t} & \sigma_{1t} = 0.030 \\
\ln(1+deposits_t) & = & 0.020 & + & 0.644 \cdot \ln(1+deposits_{t-1}) + \epsilon_{2t} & \sigma_{2t} = 0.017 \\
\ln(1+bonds_t) & = & 0.058 & + & \epsilon_{3t} & \sigma_{3t} = 0.060 \\
\ln(1+realstate_t) & = & 0.072 & + & \epsilon_{4t} & \sigma_{4t} = 0.112 \\
\ln(1+stocks_t) & = & 0.086 & + & \epsilon_{5t} & \sigma_{5t} = 0.159
\end{array}
$$

Tabela 2.1: Modelo VAR para o retorno dos ativos.

	wages	*deposits*	*bonds*	*real state*	*stocks*
wages	1				
deposits	0.227	1			
bonds	−0.152	−0.268	1		
real state	−0.008	−0.179	0.343	1	
stocks	−0.389	−0.516	0.383	0.331	1

Tabela 2.2: Tabela de correlação entre os resíduos.

cr^{ini}	cr^{lo}	cr^{up}	dcr^{lo}	dcr^{up}	F^{min}	F^{end}	w^{lo}	w^{up}	λ	γ^b	γ^s
0.12	−0.10	0.25	−0.08	0.04	1.00	1.15	0.00	1.00	4.00	0.01	0.01

Tabela 2.3: Parâmetros.

2.3 Dert (1995)

Em [29], Cornelius Dert, da Erasmus Universiteit Rotterdam, um dos mais ativos centros de pesquisa em *ALM* e programação estocástica [1], desenvolveu uma abordagem heurística para encontrar uma "boa", embora não necessariamente ótima, solução para um modelo que inclui variáveis reais e inteiras, além de restrições para a probabilidade de insolvência no período de análise. A formulação resultante é um problema de programação estocástica com variáveis mistas e restrições probabilísticas, algo de dificílima resolução exata para problemas realistas. Daí a necessidade de uma heurística que forneça ao menos uma solução "razoável". Damos a seguir uma formulação abreviada do modelo:

Variáveis de decisão:

A_t = total de ativos no estágio t, $t = 0, \ldots, T$.
X_{it} = valor de mercado do ativo i no estágio t.
Y_t = contribuição dos participantes no estágio t.
Z_t = contribuição do patrocinador no estágio t.

Coeficientes:

Y_t^l, Y_t^u = cotas mínima e máxima para Y_t.
W_t = montante de salários dos participantes ativos.
y_t^l, y_t^u = cotas mínima e máxima para Y_t/W_t
β_t = cota máxima para a variação de Y_t/W_t.
M_t = cota máxima para a contribuição do patrocinador.
x_{it}^l, x_{it}^u = cotas mínima e máxima para a proporção do ativo i no valor total do fundo.
C_{it} = cota máxima para venda do ativo i no tempo t.
D_{it} = cota máxima para compra do ativo i no tempo t.
l_t = total de benefícios a pagar no estágio t.
h_{it} = taxa de retorno do ativo i do fim do período $t-1$ até o fim do período t.

Além das variáveis de decisão listadas acima, todas de variação contínua, há uma variável

[1] Na Holanda, em geral, a pesquisa sobre a administração de fundos de pensão é bastante intensa. Boender [5] relata que, em 1997, os fundos holandeses detinham em torno de US$400 bilhões em ativos, o que representava então 25% dos ativos de todos os fundos da Comunidade Econômica Européia.

binária, f_t, que conta o número de estados em que ocorre insolvência no estágio t. A probabilidade de insolvência no tempo t é, então, $\sum_{k=1}^{K_t} f_{tk}/K_t$. Esta probabilidade é limitada por uma cota ψ_t^u.

Objetivo:

$$\text{Min } A_0 + \sum_t \mathbb{E}\left[\gamma_t Y_t\right] + \lambda \sum_t \mathbb{E}\left[\gamma_t Z_t\right] \tag{2.11}$$

Restrições:

$$Y_t^l \;\leq\; Y_t \;\leq\; Y_t^u \tag{2.12}$$

$$y_t^l \;\leq\; \frac{Y_t}{W_t} \;\leq\; y_t^u \tag{2.13}$$

$$\frac{Y_t}{W_t} - \frac{Y_{t-1}}{W_{t-1}} \;\leq\; \beta_t \tag{2.14}$$

$$h_{it}X_{i,t-1} - C_{it}^u \;\leq\; X_{it} \;\leq\; h_{it}X_{i,t-1} + D_{it}^u \tag{2.15}$$

$$x_{it}^l \cdot (A_t + Y_t - l_t) \;\leq\; X_{it} \;\leq\; x_{it}^u \cdot (A_t + Y_t - l_t) \tag{2.16}$$

$$A_t + Y_t - l_t = \sum_{i=1}^{N} X_{it} \tag{2.17}$$

$$A_t = Z_t + \sum_{i=1}^{N} h_{it}X_{i,t-1} \tag{2.18}$$

$$A_t \;\geq\; \alpha \cdot L_t \tag{2.19}$$

$$Z_{tk} \;\leq\; f_{tk} \cdot M_{tk}, \quad f_{tk} \in \{\,0,1\}. \tag{2.20}$$

$$\sum_{k=1}^{K_t} \frac{p_{tk}}{p_{t-1,\hat{k}}} \cdot f_{tk} \;\leq\; \psi_{t-1,\hat{k}}^u \tag{2.21}$$

As equações (2.17) e (2.18) são equivalentes a uma equação de atualização do estoque de ativos. A equaçào (2.20) “conta” as contribuições positivas do patrocinador do fundo, pois $f_{tk} = 1 \Leftrightarrow Z_{tk} > 0$. As contribuições são forçadas pela equação (2.19), que estabelece a condição de mínima razão de solvência, para uma constante predefinida α. Esta contagem é usada por (2.21) para restringir a probabilidade de tal contribuição em cada estágio do processo. p_{tk} é a probabilidade de ocorrência do estado k no tempo t. Os coeficientes γ_t na função objetivo são fatores de desconto. As variáveis exógenas são descritas por um modelo vetorial auto-regressivo (VAR) de 1ª ordem que modela as taxas de variação de:

(1) Salários.
(2) Inflação.
(3) Depósitos.
(4) Ações.
(5) Títulos.
(6) Imóveis.
(7) PIB Holandês.

Com este modelo, gera-se uma árvore de cenários diferente das usualmente usadas em modelos de ALM: em cada estágio t, apenas uma pequena parcela dos estados possuem descendentes no estágio seguinte, $t+1$. O estado inicial possui S_1 descendentes em $t=1$. Para cada $t=2,\ldots,T-1$, há um total de S_2 estados. Destes, apenas $S_1 \ll S_2$ possuem descendentes. Deste modo, o número de cenários cresce apenas linearmente com o horizonte de tempo, T.

Com esta estrutura de árvore, Dert propõe uma heurística para obter uma "boa" solução para o problema acima. Em uma descrição bastante sucinta, consiste em resolver uma sequência de problemas de dois estágios, nomeados $Twostage(t)$, para cada $t=2,\ldots,T$, nos quais os S_2 estágios em $t-1$ são tomados como sucessores do estágio inicial $t=0$ e o estágio t é terminal. Começando com $t=T$, as variáveis de investimentos e obrigações são "acumuladas" nos estados $k=1,\ldots,K_{t-1}$ do estágio $t-1$, usando a taxa de retorno do ativo livre de risco como fator de transporte intertemporal. Uma versão das equações de viabilidade em cada estado intermediário também é "acumulada" em $t-1$. Resolvendo-se $Twostage(t)$, as variáveis de decisão, $Y_{t-1}, X_{t-1}, A_t, Z_t, f_t$, são fixadas e passadas às restrições de estabilidade do fundo, equações (2.14), (2.14), (2.16), (2.17), para se resolver $Twostage(t\text{-}1)$, até que se chegue à solução de $Twostage(2)$. O conjunto de soluções assim obtidas, em cada estágio, é considerada por Dert uma boa solução para o problema original.

Dert implementa seu algoritmo em uma árvore de 10 estágios, cada um correspondendo a um ano adiante do estágio inicial, em 1995, com $S_1 = 100$ e $S_2 = 10^5$. Outros parâmetros escolhidos foram: nível inicial de contribuição, 16% da renda pensionável; nível mínimo de financiamento, 100%; máxima probabilidade permitida de insolvência, 5%; mínima proporção de um ativo na carteira, 0%; máxima proporção de um ativo na carteira, 100%; taxa de desconto, 15% ao ano. Compara–o então com outras estratégias: uma estratégia "estática" (média–variância) e um modelo ALM com 10 estágios e 10^5 estados e faz uso de amostragem por importância. A heurística desenvolvida por Dert sai–se melhor que o modelo de média–variância quanto à média de contribuições e bem melhor quanto à probabilidade de insolvência. Mas é o modelo ALM que apresenta desempenho superior, tanto nestes itens quanto na média da razão de financiamento.

2.4 Russell–Yasuda Kasai (1991)

Em [8], [9] e [10], os autores descrevem uma das primeiras aplicações das técnicas de programação estocástica ao mundo real. A Yasuda Fire (*Kasai*) and Marine Insurance Co., Ltd. é uma tradicional companhia de seguros japonesa, à época segunda maior do Japão e sétima maior do mundo em receitas. No fim dos anos 80, como consequência de uma série de medidas do Ministério das Finanças japonês, que incluiam o relaxamento das fronteiras que definiam as atividades dos diversos tipos de instituição financeira, a Yasuda passou a enfrentar uma maior competição de mercado, levando-a a diversificar suas atividades e oferecer novos produtos aos seus clientes. A principal mudança foi que passou a emitir um número crescente de apólices de seguro com capitalização: um título que, além de oferecer cobertura contra acidentes pessoais e patrimoniais, paga um reembolso parcial dos prêmios pagos ao fim do prazo de validade da apólice (tipicamente, 3 a 5 anos), mais juros declarados na apólice, mais bônus variáveis, declarados e pagos ao fim de cada ano fiscal (a competição de mercado leva as companhias a distribuirem bônus atraentes aos segurados). Esta nova linha de produtos mostrou-se logo um sucesso, e a Yasuda gradualmente tornou-se mais uma prestadora de serviços financeiros que uma seguradora. A fração reembolsada do valor de cada apólice frequentemente era superior a 90%.

Diversas contas foram criadas para administrar os ativos e obrigações correspondentes a cada tipo de apólices. O negócio foi ficando mais complexo à medida em que tinha de lidar com a regulamentação específica para o setor. Além das restrições de investimento em certas classes de ativos, havia regras restringindo as fontes e usos de financiamento. Por exemplo, em um tipo de apólice havia a exigência de que os juros pagos fossem provenientes unicamente dos ganhos de renda (cupons, dividendos, etc), e não dos ganhos de capital. O objetivo é tornar os retornos desse tipo de investimento mais estáveis, o que geralmente acontece com ativos que geram altos ganhos de renda. Isto gera um conflito de metas: embora a empresa deseje maximizar seus ganhos de capital a longo prazo, para aumentar seu valor de mercado e suas reservas, deve se preocupar, a curto prazo, em conseguir maximizar seus ganhos de renda.

Com este problema em mãos, a Yasuda procurava um modelo que:

(1) Representasse adequadamente o valor contábil e de mercado de suas atividades.
(2) Incorporasse a regulamentação proveniente das leis e práticas atuariais.
(3) Levasse em conta a natureza conflitante de seus objetivos.
(4) Levasse em conta as diversas escalas de tempo envolvidas nestes objetivos e nas restrições.
(5) Levasse em conta a incerteza inerente ao processo de investimento e aos mercados financeiros.
(6) Pudesse ser resovida em menos de 3 horas em uma *work station*.
(7) Fosse crível e inteligível por pessoas com diferentes tipos de formação e compreensão técnica.

A Frank Russell Company começou a trabalhar em parceria com a Yasuda Kasai em 1989 e optou por desenvolver um modelo de programação estocástica para o problema, que ficou pronto para ser testado no ano fiscal de 1991 e plenamente integrado ao processo de planejamento financeiro da companhia a partir de 1992. No primeiro ano, proporcionou um aumento de US$25 milhões em rendas, em relação à antiga metodologia utilizada (baseada no modelo de média–variância de Markowitz). Nos dois primeiros anos combinados, 1991/1992, proporcionou US$79 milhões extras em rendas e US$9 milhões extras no retorno total (rendas mais ganhos de capital). O valor total de mercado dos ativos da Yasuda, ao fim do ano fiscal de 1991, era de US$26.2 bilhões (3.47 trilhões de yens).

O aumento na receita de rendas a curto prazo era crucial para a Yasuda, pois permitia a distribuição de maiores bônus aos seus clientes, tornando suas apólices mais atraentes no mercado. O afluxo de novos clientes e o consequente crescimento do volume de negócios, portanto, é a principal vantagem da nova metodologia. As restrições contábeis levaram a Yasuda a sacrificar uma parcela dos seus ganhos de capital para procurar maiores retornos nas rendas dos ativos. Esta faceta do processo de investimentos dificilmente poderia ser refletida no modelo de média–variância anteriormente utilizado. Os autores de [8] observam ainda que a implementação do modelo levou os administradores da companhia a uma compreensão mais acurada de suas atividades. Em vez de uma tecnologia de caixa–preta, tinha–se então uma tecnologia mais flexível, que permitia um sistema mais inteligível.

A seguir, uma formulação abreviada do modelo, como descrito em [8].

Variáveis de decisão:

V_t = valor total de mercado do fundo no estágio t, $t = 0, \ldots, T$.
X_{nt} = valor de mercado do ativo n no estágio t.
w_{t+1} = déficit de renda no estágio $t+1$.
v_{t+1} = superávit de renda no estágio $t+1$.

Coeficientes estocásticos:

$RP_{n,t+1}$ = taxa de retorno sobre o preço do ativo n do fim do estágio t ao fim do estágio $t+1$.
$RI_{n,t+1}$ = taxa de retorno relativa à renda provida pelo ativo n do fim do estágio t ao fim do estágio $t+1$.
F_{t+1} = fluxo de depósitos do fim de t ao fim de $t+1$.
P_{t+1} = pagamento de reembolsos do fim de t ao fim de $t+1$.
I_{t+1} = pagamento de juros do fim de t ao fim de $t+1$.
g_{t+1} = taxa à qual são creditados juros às apólices do fim de t ao fim de $t+1$.
L_t = avaliação de obrigações totais no estágio t.

Função objetivo:

$$Max\ \mathbb{E}[V_T - \sum_{t=1}^{T} c_t(w_t)],$$

onde $c_t(\cdot)$ é uma função de utilidade convexa, linear por partes, que mede o custo de um déficit de renda w_t.

Restrições:

$$\sum_n X_{nt} - V_t = 0, \tag{2.22}$$

(o valor total do fundo é igual à soma dos seus ativos)

$$V_{t+1} - \sum_n (1 + RP_{n,t+1} + RI_{n,t+1}) X_{nt} = F_{t+1} - P_{t+1} - I_{t+1}, \tag{2.23}$$

(o crescimento do fundo deve-se aos ganhos de capital e renda, mais venda de novas apólices, menos o pagamento de reembolsos e juros).

$$\sum_n RI_{n,t+1} X_{nt} + w_{t+1} - v_{t+1} = g_{t+1} L_t, \tag{2.24}$$

(definição de déficits e superávits).

$$L_{t+1} = (1 + g_{t+1}) L_t + F_{t+1} - P_{t+1} - I_{t+1} \tag{2.25}$$

(atualização do estoque de obrigações). Além das restrições usuais de positividade: $X_{nt} \geq 0$, $v_{t+1} \geq 0$, $w_{t+1} \geq 0$, $\forall\, t = 0, \ldots, T-1$.

Árvore de decisão:

Os estados futuros foram modelados por uma árvore com estrutura 1–8–4–4–2–1, tota–lizando 256 cenários e 681 nós. Os 6 estágios correspondem ao início do ano, fim do primeiro quadrimestre, fim do 1º ano, fim do 2º ano, fim do 5º ano (horizonte de planejamento) e mais um estágio para prevenir "efeitos terminais".

2.5 Expansão da Capacidade de Geração de Energia Elétrica.

Há exemplos na literatura, como [32], [51], [55], [56], [57], [58] e [59], de algoritmos de programação estocástica aplicados à expansão de geração de eletricidade. Relatamos aqui um exemplo simples extraído de Birge e Louveaux ([4]). O objetivo é encontrar os níveis ótimos de investimento em várias formas de geração de energia elétrica para satisfazer uma demanda futura.

Neste problema, pode–se gerar energia do tipo $i = 1, ..., n$ para satisfazer uma demanda D por um tempo τ. Especialistas usualmente dividem a demanda em classes que possuem uma duração característica. As demandas *básicas* são de longa duração, enquanto as demandas *de pico* são de curta duração. As curvas que relacionam o nível de demanda com a sua duração característica são chamadas "curvas de duração de carga" (*load duration curve*). Uma forma típica destas curvas é mostrada na figura 2.2, onde o eixo horizontal marca a duração τ e o eixo

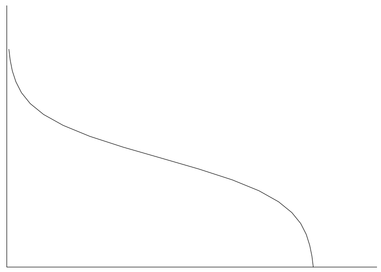


Figura 2.2: Típica curva de duração de carga.

vertical marca a demanda D.

Uma forma de geração de energia possui um custo de investimento, r_i, e um custo de operação, q_i, por unidade de tempo, por MW gerado. Portanto, se sabemos antecipadamente que uma demanda terá duração τ, basta investir na tecnologia que minimiza $r_1 + q_1\tau$. Tipicamente, equipamentos com baixo custo de investimento e alto custo de operação satisfazem demandas de curto prazo, enquanto aqueles que com alto custo de investimento e baixo custo operacional satisfazem demandas de longo prazo.

Há vários fatores que justificam, entretanto, o uso de modelos dinâmicos ou multi–estágios para resolver este problema, tais como a evolucão a longo prazo do custo dos equipamentos e da curva de carga, o aparecimento de novas tecnologias e a obsolescência do equipamento disponível.

Para modelar o problema, precisamos discretizar a curva de carga, associando a cada tempo τ_j uma diferença de demanda, $d_j = D_j - D_{j-1}$. Cada índice $j = 1, ..., m$ denotará então um *modo de operação*. As variáveis do modelo dinâmico, são: L_i, o tempo de vida da tecnologia i; g_i^t, a capacidade da tecnologia i no tempo t, fixada antecipadamente; τ_i^j, a duração do modo j no tempo t; d_j^t, a máxima potência demandada no modo j no tempo t. Variáveis de decisão: x_i^t, capacidade tornada disponível para a tecnologia i no tempo t; w_i^t, capacidade total da tecnologia i no tempo t; y_{ij}^t, capacidade da tecnologia i efetivamente utilizada em modo j no tempo t.

O problema de geração de eletricidade em H estágios pode então ser estabelecido como:

$$\min_{x,y,w} \sum_{t=1}^{H} \sum_{i=1}^{n} \left(r_i^t w_i^t + \sum_{j=1}^{m} q_i^t \tau_i^j y_{ij}^t \right) \tag{2.26}$$

$$w_i^t = w_i^{t-1} + x_i^t - x_i^{t-L_t} \tag{2.27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^t = d_j^t \tag{2.28}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^t \leq g_i^t + w_i^{t-\Delta_i} \tag{2.29}$$

$$x, y, w \geq 0 \tag{2.30}$$

Onde Δ_i é o tempo de espera para construção de uma unidade da tecnologia i. Fazendo os parâmetros variarem estocasticamente e incluindo o operador esperança na função objetivo, temos um modelo estocástico de expansão da capacidade energética.

Em [32] e [42], Entriken e Infanger usam um modelo simples deste tipo, com apenas dois estágios, para ilustrar sua estratégia de amostragem de Monte Carlo aliada à decomposição de Benders (descrita no capítulo 3): há dois geradores com diferentes custos de investimento e de operação, e a demanda é dada por uma curva de duração de carga com três níveis apenas: básico, médio e pico. Os geradores são indexados por $j = 1, 2$, e as demandas por $i = 1, 2, 3$.

As variáveis de decisão são a capacidade de geração de cada gerador, x_j, e o nível de operação de cada gerador j sob demanda i, y_{ij}, a um custo operacional q_{ij}. Também é usada uma variável de demanda insatisfeita, y_{is}, que pode ser adquirida a um custo penalizante de $q_{is} > q_{ij}$.

Cada novo gerador pode ser construído a um custo unitário r_j, e este custo compete com a penalidade de demanda insatisfeita, na função custo. Contudo, existe uma capacidade mínima a ser construída, b_j, para cada gerador. Além disto, a disponibilidade real de cada gerador, α_j, é incerta, bem como cada demanda, d_i. Uma restrição de "confiabilidade" garante ainda que a soma das demandas insatisfeitas é limitada por uma constante r. Desta maneira, o problema pode ser formulado como segue:

$$\min \sum_{j=1}^{2} r_j x_j + \mathbb{E}\{\sum_{j=1}^{3} q_{ij} y_{ij}^{\omega} + \sum_{i=1}^{3} q_{is} y_{is}^{\omega}\}$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{s/t} & x_j & & & \geq & b_j & \\ & -\alpha_j^{\omega} x_j & + & \sum_{j=1}^{2} y_{ij}^{\omega} & & \leq & 0, & j=1,2 \\ & & & \sum_{j=1}^{2} y_{ij}^{\omega} & + \; y_{is}^{\omega} & \geq & d_i^{\omega}, & i=1,2,3 \\ & & & & \sum_{i=1}^{3} y_{is}^{\omega} & \leq & r & \\ & x_j, & & y_{ij}^{\omega}, & y_{is}^{\omega} & \geq & 0 & j=1,2, \\ & & & & & & & i=1,2,3. \end{array} \tag{2.31}$$

Entriken e Infanger utilizam Amostragem por Importância para resolver este problema. Este método pode ser descrito sucintamente como segue: na decomposição de Benders (capítulo 3), a cada iteração l são adicionados cortes do tipo:

$$G^{(l)} x + \gamma^{(l)} \theta \geq g^{(l)} \tag{2.32}$$

onde

$$G^{(l)} = -\sum_{\omega} p^{\omega} \pi^{\omega *}(\hat{x}^{(l)}) T^{\omega} = -\mathbb{E}\{\pi^{\omega *}(\hat{x}^{(l)}) T^{\omega}\} \tag{2.33}$$

$$g^{(l)} = \sum_{\omega} p^{\omega} \pi^{\omega *}(\hat{x}^{(l)}) h^{\omega} = \mathbb{E}\{\pi^{\omega *}(\hat{x}^{(l)}) h^{\omega}\} \tag{2.34}$$

$$\gamma^{(l)} = 0 \text{ para cortes de viabilidade, 1 para cortes de otimalidade.} \tag{2.35}$$

Assim, como os coeficientes dos cortes são esperanças, podemos calculá–los usando métodos de Monte Carlo, em vez de fazer a conta inteira, incluindo todos os termos de menor valor. Entriken e Nakayama desenvolvem o método em [17], usando Amostragem por Importância como técnica de redução de variância na soma de Monte Carlo (esta e algumas outras técnicas são esboçadas no apêndice D). Os parâmetros do modelo são transcritos na tabela 2.4.

Entriken e Infanger usam o exemplo acima para investigar as propriedades estatísticas de uma solução obtida por este método. Realizam 100 experimentos idênticos, com amostras de tamanho 20 para o Monte Carlo. O número de cenários, levando em conta as possibilidades de demanda e disponibilidade dos geradores é de 1280. A restrição de máxima demanda insatisfeita foi retirada destes testes. A média da função objetivo nas 100 realizações diferiu do valor real por 0.2%. Um intervalo de confiança de 95% foi computado como sendo de ± 1.5 da média.

Custo de Capacidade dos Geradores (10^5 \$/kW·ano) $c_1 = 0.4, \quad c_2 = 0.25$
Custo de Operação dos Geradores (10^5 \$/kW·ano) $q_{11} = 0.43, \; q_{12} = 0.20, \; q_{13} = 0.50, \; q_{21} = 0.87, \; q_{22} = 0.40, \; q_{23} = 0.10$
Penalidade por Demanda Insatisfeita (10^5 \$/kW·ano) $q_{1s} = q_{2s} = q_{3s} = 1.0$
Mínima Capacidade Exigida (MW) $b_1 = b_2 = 1000$
Demandas (MW) Valores 900 1000 1100 1200 Probabilidades 0.15 0.45 0.25 0.15
Disponibilidade dos Geradores Gerador 1 Valores 1.0 0.9 0.5 0.1 Probabilidades 0.2 0.3 0.4 0.1 Gerador 2 Valores 1.0 0.9 0.7 0.1 0.0 Probabilidades 0.1 0.2 0.5 0.1 0.1
Máxima Demanda Insatisfeita $r = 500$

Tabela 2.4: Parâmetros do modelo de Entriken e Infanger.

Capítulo 3

Decomposição de Benders

Retornemos ao problema apresentado no capítulo 1. Reescrevamo–lo aqui para facilidade de referência:

$$\begin{aligned}
\min_{x_1} \quad & c_1 x_1 + \mathbb{E}_{k_2}\,[\,\min\nolimits_{x_2^{k_2}} c_2^{k_2} x_2^{k_2} + \cdots + \mathbb{E}_{k_T}\ \min\nolimits_{x_T^{k_T}} c_T^{k_T} x_T^{K_T}\,]\,]\cdots] & (3.1)\\
\text{t/q} \quad & T_t^{k_t} x_{t-1}^{\hat{k}_t} + W_t^{k_t} x_t^{k_t} = b_t^{k_t}, & (3.2)\\
& x_t^{k_t} \geq 0, \quad t = 1, \ldots, H, \quad k_t = 1, ..., K_t. & (3.3)
\end{aligned}$$

Onde $\hat{k}$ é o antecessor do estado k em $t-1$ e convencionamos que $x_{t-1}^{\hat{k}} = 0$ para t=1. Como vimos, este *equivalente determinístico* pode ser escrito como uma sequência de problemas não lineares de dois estágios:

$$\begin{aligned}
Q_t^k(x_{t-1}^{\hat{k}}) = \min_{x_t^k}\ & c_t^k x_t^k + \mathbb{E}_{s|k}\ Q_{t+1}^s(x_t^k) \qquad (3.4)\\
\text{t/q}\ \ & T_t^k x_{t-1}^{\hat{k}} + W_t^k x_t^k = b_t^k, \ \ x_t^k \geq 0.
\end{aligned}$$

Onde, em cada um destes estágios, existe ainda, naturalmente, a exigência de que x_t^k deve pertencer à região de viabilidade de $Q_{t+1}^s(\,\cdot\,)$, $\forall\, s \in desc(k)$.

A equação (3.4) sugere que devemos antes investigar o problema de programação estocástica em dois estágios. De fato, historicamente, o algoritmo de decomposição foi inicialmente desenvolvido para o problema de dois estágios, essencialmente por Benders [2], Dantzig e Madansky

[14] e Van Slyke e Wets [69], sendo posteriormente estendido por Birge [3] para o problema de múltiplos estágios. Por conta disto, examinaremos inicialmente o problema mais elementar:

3.1 O Problema de Dois Estágios

Podemos assim estabelecer o problema estocástico de dois estágios:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c_1 x + \mathbb{E}_k\, c_2^k y^k \\ \text{t/q} \quad & W_1 x = b_1, \\ & T^k x + W_2^k y^k = b_2^k, \quad k = 1, \ldots, K, \\ & x \geq 0,\ y^k \geq 0,\ k = 1, \ldots, K. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Uma sequência de manipulações é então aplicada ao problema (3.5) para levá-lo a uma forma mais adequada [1]. Primeiro uma *projeção* na variável x:

Lema 1 *O problema*

$$\min_{x \in X,\, y \in Y} f(x,y) \ \ t.q. \ \ g(x,y) \leq 0 \tag{3.6}$$

é equivalente a

$$\min_{x \in X \cap V} v(x) \tag{3.7}$$

onde

$$v(x) = \min_{y \in Y} f(x,y) \ \ t.q. \ \ g(x,y) \leq 0 \tag{3.8}$$

e

$$V = \{x \mid g(x,y) \leq 0, \ para\ algum\ y \in Y\}. \tag{3.9}$$

Ou seja, podemos resolver em dois estágios um problema envolvendo duas variáveis, incluindo mais uma restrição de "viabilidade" entre um estágio e outro.

[1] Uma boa exposição pode ser encontrada em Geoffrion [35]

Por equivalência entre os dois problemas queremos dizer que:

(1) (3.6) é viável $\Leftrightarrow$ (3.7) é viável.
(2) (3.6) é finito $\Leftrightarrow$ (3.7) é finito.
(3) (x^*, y^*) é solução ótima de (3.6) $\Leftrightarrow$ x^* é solução ótima de (3.7) e y^* é solução ótima de (3.8), para $x = x^*$.

Demonstração do lema 1:
(1) $\exists\, x \in X,\ y \in Y\ t.q.\ g(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists\, x \in X \cap V.$
(2) $f(x, y) \geq c, \forall\, x \in X,\ y \in Y,\ t.q.\ g(x, y) \leq 0 \ \Leftrightarrow\ v(x) \geq c, \forall\, x \in X \cap V.$
(3) Se (x^*, y^*) é um ótimo de (3.6), então $x^* \in X, y^* \in Y$ e $g(x^*, y^*) \leq 0$ e

$$f(x^*, y^*) \leq f(x, y),\ \forall\, x \in X,\ y \in Y,\ \ t.q.\ \ g(x, y) \leq 0.$$

$$\Rightarrow\ v(x^*) = f(x^*, y^*) \leq v(x),\ \forall\, x \in X \cap V$$

O que implica, concomitantemente, que x^* é ótimo de (3.7) e y^* é ótimo de (3.8) para $x = x^*$. Se, inversamente, x^* é ótimo de (3.7), y^* é ótimo de $v(x^*)$ e y_x é ótimo de $v(x)$, então $x^* \in X \cap V$, $y^* \in Y$, $g(x^*, y^*) \leq 0$ e

$$v(x^*) \leq v(x),\ \forall\, x \in X \cap V$$

$$\Rightarrow\ f(x^*, y^*) \leq f(x, y_x) \leq f(x, y),\ \ \forall\, x \in X,\ y \in Y,\ \ t.q.\ \ g(x, y) \leq 0\ \ \diamond$$

Corolário 2 *O Problema (3.5) é equivalente a:*

$$\min\ \ c_1 x + \mathcal{Q}(x) \tag{3.10}$$

$$\text{t/q}\ \ W_1 x = b_1,\ \ x \geq 0. \tag{3.11}$$

$$x \in V_2^k,\ \ k = 1, \ldots, K. \tag{3.12}$$

Onde:

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_k \min \{c_2^k y^k \mid W_2^k y^k = b_2^k - T^k x,\ \ y^k \geq 0\}, \tag{3.13}$$

$$V_2^k = \{x \mid\ W_2^k y^k = b_2^k - T^k x,\ \ \textit{para algum}\ \ y^k \geq 0\}. \tag{3.14}$$

Para encontrar uma representação mais adequada para as regiões de viabilidade V_2^k, escrevemos cada um dos subproblemas (3.13) na sua forma dual:

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_k p^k Q^k(x), \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} Q^k(x) \;=\; & \max \quad \pi^k(b^k - T^k x) \\ & \text{t/q} \quad\; \pi^k W_2^k \leq c_2^k. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como se trata de um problema de máximo, se a região de viabilidade de (3.16) possuir uma direção extrema, γ^k, tal que $\gamma^k(b^k - T^k x) > 0$, então o problema (3.16) será ilimitado, e, portanto, seu primal será inviável. Se denotarmos por $\gamma^{kj},\ j = 1, \ldots, r^k$, as direções extremas de $\{\pi \mid \pi W_2^k \leq c_2^k\}$, as restrições $x \in V_2^k,\ k = 1, \ldots, K$, podem ser escritas como:

$$\gamma^{kj}(b^k - T^k x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, r^k, \;\; k = 1, \ldots, K. \tag{3.17}$$

Por outro lado, se $\nu^{kj_k},\ j_k = 1, \ldots, s^k$, denotam os vértices de $\{\pi \mid \pi W_2^k \leq c_2^k\}$, então

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_k p^k \max_{j_k = 1 \ldots s^k} \nu^{kj_k}\,(b^k - T^k x) \tag{3.18}$$

E o problema (3.10) torna-se

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 x + \textstyle\sum_k p^k \max_{j_k = 1 \ldots s^k} \nu^{kj}\,(b^k - T^k x) \\ \text{t/q} \quad & W_1 x = b_1, \;\; x \geq 0, \\ & \gamma^{kj}(b^k - T^k x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, r^k, \;\; k = 1, \ldots, K. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Se, além disso, introduzirmos como variável adicional a menor cota superior de $\mathcal{Q}(x)$, teremos:

$$\min \quad c_1 x + \theta \tag{3.20}$$

$$\text{t/q} \quad W_1 x = b_1, \;\; x \geq 0, \tag{3.21}$$

$$\gamma^{kj}(b^k - T^k x) \leq 0, \;\; j = 1, \ldots, r^k, \;\; k = 1, \ldots, K, \tag{3.22}$$

$$\theta \geq \sum_k p^k \nu^{kj_k}\,(b^k - T^k x), \;\; j_k = 1, \ldots, s^k. \tag{3.23}$$

O algoritmo de Benders consiste essencialmente em *relaxar* as restrições (3.22)–(3.23) e acrescentá–las sucessivamente, à medida que forem exigidas. A versão básica é descrita a seguir (Birge e Louveaux [4]):

Passo 0: Faça $r = s = i = 0$.

Passo 1: Faça $i = i + 1$. Resolva o problema (3.24)–(3.27):

$$\min \quad z = c_1 x + \theta \tag{3.24}$$

$$\text{t/q} \quad W_1 x = b_1, \quad x \geq 0, \tag{3.25}$$

$$D_j\, x \geq d_j\,, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{3.26}$$

$$E_j\, x + \theta \geq e_j\,, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{3.27}$$

Encontrando uma solução ótima $(x^{(i)}, \theta^{(i)})$. Se nenhuma restrição do tipo (3.27) existe ainda, a variável θ é eliminada do problema e fixa-se $\theta^{(i)} = -\infty$.

Passo 2: Para cada $k = 1, \ldots, K$, resolva o problema de viabilidade:

$$\begin{aligned} \min \quad & w^k = ev^+ + ev^- \\ \text{t/q} \quad & W_2^k y + Iv^+ - Iv^- = b_2^k - T^k x^{(i)}, \\ & y \geq 0, \quad v^+ \geq 0, \quad v^- \geq 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $e^T = (1, \ldots, 1)$. Se, para algum k, encontrar $w^k > 0$, seja γ^k o vetor de multiplicadores simplex associados a (3.28) e defina

$$D_{r+1} = \gamma^k T^k \tag{3.29}$$

$$d_{r+1} = \gamma^k b_2^k, \tag{3.30}$$

para adicionar uma nova restrição do tipo (3.26). Faça $r = r + 1$ e volte ao passo 1. Se, por outro lado, $w^k = 0$, $\forall\, k$, siga para o passo 3.

Passo 3: Se todos os problemas do 2º estágio são viáveis, então resolva–os:

$$\begin{aligned} Q^k(x^{(i)}) \;=\; & \min \;\; c_2^k y^k \\ & \text{t/q} \;\; W^k y^k = h^k - T^k x^{(i)}, \\ & \qquad y^k \geq 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

com os correspondentes multiplicadores simplex, π^k. Calcule então

$$E_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} p_k \pi^k T^k x^{(i)} \tag{3.32}$$

$$e_{s+1} = \sum_{k=1}^{K} p_k \pi^k h^k \tag{3.33}$$

de modo que $\mathcal{Q}(x^{(i)}) = e_{s+1} - E_{s+1}x^{(i)}$. Se $\theta^{(i)} = \mathcal{Q}(x^{(i)})$, termine o algoritmo: $(x^{(i)}, y^1, \ldots, y^K)$ é solução ótima de (3.20)–(3.23). Caso contrário, adicione a restrição $E_{s+1}\, x + \theta \geq e_{s+1}$ ao problema (3.24)–(3.27), faça $s = s + 1$ e retorne ao passo 1.

É claro que se prosseguirmos até incluir todas as restrições (3.22)–(3.23) teremos garantida a viabilidade e otimalidade de $x^{(i)}$. O algoritmo, portanto, é finito. Resta explicar o critério de finalização do passo 3: as restrições (3.23) são equivalentes a $\theta^{(i)} \geq \mathcal{Q}(x^{(i)})$, que por sua vez equivale a $\theta^{(i)} = \mathcal{Q}(x^{(i)})$. Portanto: $\theta^{(i)} = \mathcal{Q}(x^{(i)}) \;\Rightarrow\; (\theta^{(i)}, x^{(i)})$ satisfaz todas as restrições (3.23) $\Rightarrow$ $(\theta^{(i)}, x^{(i)})$ é ótimo.

3.2 Geometria dos Conjuntos de Viabilidade

Proposição 3 *Para cada k, V_2^k é um politopo convexo.*

Dem.: Considere o conjunto $pos\, W = \{t \mid Wy = t,\ para\ algum\ y \geq 0\}$. Temos então:

$$x \in V_2^k \;\Leftrightarrow\; h^k - T^k x \in pos\, W_2^k, \tag{3.34}$$

onde $pos\, W_2^k$ é a *envoltória positiva* das colunas de W_2^k, ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares a coeficientes positivos das colunas de W_2^k, e, portanto, pode ser definido por um conjunto finito de equações lineares, digamos, $\{t \mid W_2^{k\,*} t \leq 0\}$ ($W_2^{k\,*}$ é conhecida como *matriz polar* de W_2^k). Assim,

$$x \in V_2^k \;\Leftrightarrow\; W_2^{k\,*} T^k x \geq W_2^{k\,*} h^k. \tag{3.35}$$

O que implica que V_2^k é um politopo convexo $\diamond$

Definimos então o conjunto de viabilidade do 2º estágio por:

$$V_2 = \bigcap_k V_2^k, \tag{3.36}$$

Corolário 4 *V_2 é um politopo convexo.*

3.3 A Geometria da Função de Custo Esperado do 2º Estágio

Proposição 5 *$\mathcal{Q}(x)$ é convexa e linear por partes.*

Dem.:

$$\begin{array}{rcll} Q^k(x) & = & \min & c_2^k\, y \\ & & \text{t/q} & W^k y = h^k - T^k x, \;\; y \geq 0 \end{array} \tag{3.37}$$

Da programação linear paramétrica, sabemos que alterar o lado direito de um programa linear, de modo que $b(w) = b + w$, para w "suficientemente pequeno", altera o valor ótimo do programa original, de modo que $z^*(w) = z^* + \pi^* \cdot w$, onde π^* é o vetor de multiplicadores *simplex* do programa original. Então, se mudamos x para $x + x'$, para x' "suficientemente pequeno", teremos $Q^k(x+x') = Q^k(x) - \pi^k T^k \cdot x'$. Tomando a esperança em k, chegamos a $\mathcal{Q}(x+x') = \mathcal{Q}(x) - \mu \cdot x'$, o que prova a linearidade por partes.

Por outro lado, para $\lambda \in [\,0,1\,]$ fixo:

$$\begin{array}{rcll} Q^k(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) & = & \min_{y_1,\, y_2} & c_2^k \cdot (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \\ & & \text{t/q} & W^k(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = h^k - \lambda T^k x_1 - (1-\lambda) T^k x_2, \\ & & & y_1,\, y_2 \geq 0. \\ & & & \\ & \leq & \min_{y_1,\, y_2} & c_2^k \cdot (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \\ & & \text{t/q} & W^k y_1 = h^k - T^k x_1, \;\; W^k y_2 = h^k - T^k x_2, \\ & & & y_1,\, y_2 \geq 0. \end{array}$$

$$
\begin{array}{rllcll}
= & \min_{y_1} & \lambda c_2^k y_1 & + & \min_{y_2} & (1-\lambda) c_2^k y_2 \\
 & \text{t/q} & W^k y_1 = h^k - T^k x_1, & & \text{t/q} & W^k y_2 = h^k - T^k x_2, \\
 & & y_1 \geq 0. & & & y_2 \geq 0.
\end{array}
$$

$$= \lambda Q^k(x_1) + (1-\lambda) Q^k(x_2).$$

Portanto, $Q^k(\lambda x_1 + (1-\lambda x_2)) \leq \lambda Q^k(x_1) + (1-\lambda) Q^k(x_2)$ e, tomando a esperança em relação a k, concluímos que $\mathcal{Q}(x)$ é convexa $\diamond$

3.4 O Problema de Múltiplos Estágios

Trataremos agora do problema (3.1)–(3.2) em sua versão multi–estágio. O algoritmo abaixo, apresentado por Birge em [3], consiste de uma extensão natural do algoritmo de dois estágios:

Passo 0: Faça $t = 1$, $k = 1$, $r_t^k = s_t^k = 0$ e $DIR = VOLTA$. Siga para o passo 1.

Passo 1: Resolva o problema (3.38)–(3.41):

$$Q_t^k(x_{t-1}^{\hat{k}}) = \min \; c_t^k x_t^k + \theta_t^k \tag{3.38}$$

$$\text{t/q} \;\; W_t^k x_t^k = h_t^k - T_t^k x_{t-1}^{\hat{k}}, \;\; x_t^k \geq 0, \tag{3.39}$$

$$D_{t,j}^k x_t^k \geq d_{t,j}^k, \;\; j = 1, \ldots, r_t^k, \tag{3.40}$$

$$E_{t,j}^k x_t^k + \theta_t^k \geq e_{t,j}^k, \;\; j = 1, \ldots, s_t^k. \tag{3.41}$$

Se o problema é inviável e $t = 1$, $PARE$, o problema é inviável.

Se o problema é inviável e $t > 1$, então faça $r_{t-1}^{\hat{k}} = r_{t-1}^{\hat{k}} + 1$, $DIR = VOLTA$. Suponha que a condição de inviabilidade seja dada por multiplicadores duais π_t^k, $\rho_t^k \geq 0$ tais que $\pi_t^k W_t^k + \rho_t^k D_t^k \leq 0$, com $\pi_t^k(h_t^k - T_t^k x_t^{\hat{k}}) + \rho_t^k d_t^k > 0$. Adicione uma nova restrição do tipo (3.40) ao problema $(t-1, \hat{k})$, com $D^{\hat{k}}_{t-1, r^{\hat{k}}_{t-1}} = \pi_t^k T_{t-1}^k$ e $d^{\hat{k}}_{t-1, r^{\hat{k}}_{t-1}} = \pi_t^k h_t^k + \rho_t^k d_t^k$. Faça $t = t-1$, $k = \hat{k}$ e retorne ao passo 1.

Se o problema é viável, armazene os valores x_t^k e θ_t^k da solução e os multiplicadores $\pi_t^k, \rho_t^k, \sigma_t^k$ das restrições (3.39), (3.40), (3.41), respectivamente. Então:

· Se $k < K^t$, faça $k = k + 1$ e retorne ao início do passo 1.

· Caso contrário, se $DIR = ADIANTE$ e $t < H$, faça $t = t + 1$, $k = 1$ e retorne ao início do passo 1.

Se $t = H$, faça $DIR = VOLTA$.

Siga para o passo 2.

Passo 2: Para cada cenário $j = 1, \ldots, K_{t-1}$ no tempo $t - 1$, calcule:

$$E_{t-1}^j = \sum_{k \in desc_t(j)} \frac{p_t^k}{p_{t-1}^j} \pi_t^k T_{t-1}^k \tag{3.42}$$

$$e_{t-1}^j = \sum_{k \in desc_t(j)} \frac{p_t^k}{p_{t-1}^j} \left[\pi_t^k h_t^k + \rho_t^k d_t^k + \sigma_t^k e_t^k\right] \tag{3.43}$$

Se $s_{t-1}^j = 0$ ou $\theta_{t-1}^j < e_{t-1} - E_{t-1}^j x_{t-1}^j$, então faça $s_{t-1}^j = s_{t-1}^j + 1$ e adicione uma restrição do tipo (3.41) ao problema $(t-1, j)$.

Se $t = 2$ e nenhuma restrição foi adicionada, $PARE$, x_1^1 é ótimo.

Caso contrário, faça $t = t - 1$, $k = 1$. Se $t = 1$, faça $DIR = ADIANTE$. Volte ao passo 1.

A prova da corretude não é difícil, consistindo essencialmente de uma analogia com o caso de dois estágios e uma indução em t. Note-se ainda que, como no caso de dois estágios, supomos ser o problema finito. Isto pode ser testado no estágio de modelagem e simplifica bastante o algoritmo, embora a formulação original de Van Slyke e Wets [69] inclua cortes de finitude.

Teorema 6 *Se cada estágio possui um número finito de estágios e cada x_t^k é limitado, então o algoritmo de decomposição aninhada converge em um número finito de iterações para uma solução ótima.*

Dem.: Primeiro, provemos que as restrições (3.40) definem adequadamente as restrições de viabilidade, ou seja,

$$Q^j_{t+1}(x^k_t) \text{ é viável } \forall j \in desc_{t+1}(k) \text{ se e somente se } x^k_t \text{ satisfaz (3.40).}$$

É claro que é isto é válido no horizonte H. Suponhamos que seja válido para todos os tempos posteriores a $t-1$. O dual do problema de viabilidade correspondente a (3.38)–(3.41) é

$$\max \quad \pi^k_t(h^k_t - T^k_t x^{\hat{k}}_{t-1}) + \rho^k_t d^k_t + \sigma^k_t e^k_t \tag{3.44}$$

$$\text{t/q} \qquad \pi^k_t W^k_t + \rho^k_t D^k_t + \sigma^k_t E^k_t \leq 0 \tag{3.45}$$

$$\sum_{j=1}^{s^k_t} \sigma^k_{t,j} = 0 \tag{3.46}$$

$$-1 \leq \pi^k_t, \rho^k_t, \sigma^k_t \leq 1, \quad \sigma^k_t, \rho^k_t \geq 0. \tag{3.47}$$

$$= \quad \max \quad \pi^k_t(h^k_t - T^k_t x^{\hat{k}}_{t-1}) + \rho^k_t d^k_t \tag{3.48}$$

$$\text{t/q} \quad \pi^k_t W^k_t + \rho^k_t D^k_t \leq 0 \tag{3.49}$$

$$-1 \leq \pi^k_t \leq 1 \tag{3.50}$$

$$0 \leq \rho^k_t \leq 1. \tag{3.51}$$

Fica claro então que $Q^k_t(x^k_{t-1})$ é viável $\forall\, k \in desc_t(\hat{k})$ se e somente se, para toda base π^k_t, ρ^k_t de (3.49)–(3.51), $x^{\hat{k}}_{t-1}$ satisfizer $\pi^k_t(h^k_t - T^k_t x^{\hat{k}}_{t-1}) + \rho^k_t d^k_t \leq 0$, que equivale à equação (3.40).

Agora queremos provar que os cortes em (3.41) definem uma linearização externa de $\mathcal{Q}^k_{t+1}(x^k_t) = \mathbb{E}_{j|k}\left[Q^j_{t+1}(x^k_t)\right]$, ou seja,

$$\mathcal{Q}^k_{t+1}(x^k_t) \geq -E^k_t x^k_t + e^k_t, \tag{3.52}$$

$\forall\ \pi^k_{t+1}, \rho^k_{t+1}, \sigma^k_{t+1}$ satisfazendo (3.39)–(3.41). Suponhamos que isto seja válido para todo os tempos posteriores a t. O dual do problema (3.38)–(3.41) é

$$Q^k_t(x^{\hat{k}}_{t-1}) \;=\; \max \quad \pi^k_t(h^k_t - T^k_t x^{\hat{k}}_{t-1}) + \rho^k_t d^k_t + \sigma^k_t e^k_t \tag{3.53}$$

$$\text{t/q} \qquad \pi^k_t W^k_t + \rho^k_t D^k_t + \sigma^k_t E^k_t \leq 0 \tag{3.54}$$

$$\sigma_t^k, \rho_t^k \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{s_t^k} \sigma_{t,j}^k = 1. \tag{3.55}$$

Portanto:

$$Q_t^k(x_{t-1}^{\hat{k}}) \geq \pi_t^k(h_t^k - T_t^k x_{t-1}^{\hat{k}}) + \rho_t^k d_t^k + \sigma_t^k e_t^k$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Q}_t^{\hat{k}}(x_{t-1}^{\hat{k}}) \;\geq \sum_{k \in desc_t(\hat{k})} \frac{p_t^k}{p_{t-1}^{\hat{k}}} \left[\pi_t^k(h_t^k - T_t^k x_{t-1}^{\hat{k}}) + \rho_t^k d_t^k + \sigma_t^k e_t^k\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{Q}_t^{\hat{k}}(x_{t-1}^{\hat{k}}) \geq -E_{t-1}^{\hat{k}} x_{t-1}^{\hat{k}} + e_{t-1}^{\hat{k}} \quad \diamond$$

3.5 Um Código para o Algoritmo de Decomposição

A seguir, descrevemos um código escrito para SCILAB, implementando o algoritmo de decomposição estocástica descrito nas seções anteriores. O sistema consiste das seguintes funções:

1. `StocDec.m`
2. `Solve.m`
3. `Optcuts.m`
4. `desc.m`
5. `getm.m`
6. `putm.m`

`StocDec.m` é o *script* principal do sistema e corresponde ao *passo 1* do algoritmo. Inicializa todas as variáveis principais e compila as funções restantes. A cada iteração do passo 1, `Solve.m` monta os subproblemas (3.38)–(3.41), decidindo pela viabilidade e retornando soluções e multiplicadores *simplex*. Sua chamada tem a forma

```
function [xtk,thtk,pitk,rhotk,sigmatk,feasible]=Solve(t,k,xtak)
```

onde `xtak`= $x_{t-1}^{\hat{k}}$.

`Optcuts.m` corresponde ao *passo 2* do algoritmo. Calcula os cortes de viabilidade em um estágio e decide pela terminação do algoritmo.

A função fornece o conjunto de descendentes de (t, k). Ela depende do vetor de antecessores a, que associa a cada nó $n(t, k)$ o estado antecessor em $t - 1$.

As funções `getm.m` e `putm.m` manipulam a estrutura de dados criada para armazenar as restrições (3.40)–(3.41): Uma restrição do tipo $D^k_{t,j} x^k_t \geq d^k_{t,j}$ é armazenada como uma linha $[-D^k_{t,j} \; - d^k_{t,j}]$ de uma matriz Mv^k_t. Para possibilitar a referência a cada uma destas matrizes ao longo do algoritmo, empilhamo-nas todas em uma única matriz, Mv. Analogamente, cada restrição do tipo $E^k_{t,j} x^k_t + \theta^k_t \geq d^k_{t,j}$ é armazenada em matrizes Mo^k_t, "empilhadas" em uma única matriz, Mo. Para acrescentar novas restrições ou ler as existentes é necessário armazenar também vetores r^k_t e s^k_t, contendo o número de restrições correntes em cada nó. Para acrescentar uma nova restrição, `new` , ao nó (t, k), de uma destas matrizes `Mx` , a chamada de `putm.m` é:

```
[Mx,ind]=putm(new,Mx,ind,t,k)
```

onde `ind` é o índice associado à `Mx` , no caso, r para Mv, ou s para Mo. `putm` atualiza o índice cada vez que é usada, incrementando de 1 o valor de r^k_t. Para ler o bloco correspondente ao nó (t, k) da matriz `Mx` usamos:

```
[M,b]=getm(Mx,ind,t,k)
```

onde M e b são, respectivamente, os lados esquerdo e direito do bloco de restrições procurado.

Além destas rotinas principais, temos os *scripts* e funções específicos de cada problema. A cada problema, deve–se criar um diretório `prob` contendo os seguintes arquivos:

1. `c.m`
2. `W.m`
3. `T.m`
4. `h.m`
5. `tree_str.m`
6. `paramet.m`

Onde $c(t, k)$, $W(t, k)$, $T(t, k)$ e $h(t, k)$ são funções que dão, respectivamente, o vetor de custos, a matriz de recurso, a matriz de tecnologia e o vetor de demanda de cada nó. Note-se que todas estes arquivos devem localizar–se em um diretório `problem` , logo abaixo do diretório de trabalho do SCILAB, que deve ser definido como variável antes da chamada a `StocDec` .

O *script* `tree_str.m` define a estrutura da árvore utilizada no problema. No problema do fabricante de ar–condicionados, descrito na seção 3.6, utilizamos o seguinte:

```
// ******************************
//  Exemplo de arquivo tree_str.m
// ******************************

// define estrutura da arvore:

   str=[1 2 2];

   dt= [0 1 1];

// constrói estrutura da arvore:

   H=length(Str);

   K=[1]; for z=2:H, K=[K Str(z)*K(z-1)]; end;

   n(1,1)=1; for z=2:H, for j=1:K(z), n(z,j)=n(z-1,K(z-1))+j; end, end;

   a(1)=0; for z=2:H, for j=1:K(z), a(n(z,j))=ceil(j/Str(z)); end, end;

   N=n(H,K(H));

// define probabilidades de transição:

   p=[]; for z=1:H, p(n(z,1):n(z,K(z)))=ones(1,K(z))/K(z); end,
```

Este arquivo consiste de duas partes. A primeira é auxiliar e específica do problema: `str=[1 2 2]` codifica a estrutura da árvore binária de três estágios descrita na seção 3.6 e `dt=[0 1 1]` informa os intervalos de tempo entre os estágios (no caso, medido em meses). A segunda parte de `tree_str.m` define as variáveis indispensáveis à especificação da estrutura da árvore:

H: Número de estágios do problema.
$K(t)$: Número de estados no estágio t.
$n(t,k)$: O nó (t,k) recebe o rótulo $n(t,k) \in \{1,\ldots,N\}$.

$a(n(t,k))$: Estágio ntecessor do nó (t,k) no tempo $t-1$.
$p(t,k)$: Probabilidade do nó (t,k) ocorrer, a partir de $(1,1)$.

No exemplo em questão, todos os descendentes de um nó recebem igual probabilidade, $1/\#desc_t(k)$.

O *script* `paramet.m` pode ser usado para definir variáveis adicionais do problema. No mínimo, ele deve conter o vetor de índices de equações nas restrições $T_t^k x_{t-1}^{\hat{k}} + W_t^k x_t^k = h_t^k$ (as linhas restantes são supostas do tipo $\leq$).

Ao todo, a estrutura de arquivos e diretórios do sistema pode ser descrito como segue:

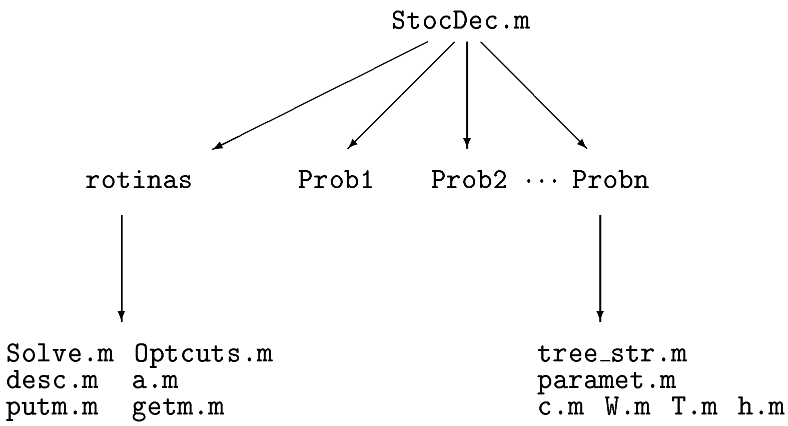


Figura 3.1: Estrutura de arquivos.

No apêndice A apresentamos ainda o equivalente deste código em Matlab.

```
function [x,th,pi]=StocDec(problem,report_level)

[nouts,nins]=argn(0);

if nins==1 then report_level=2; end


// ****************************************
// Inicializa Funções e Variáveis.
// ****************************************

   timer();

// Dados do problema:

   exec(problem+'\tree_str.m');

   exec(problem+'\paramet.m');

   getf(problem+'\c.m');

   getf(problem+'\h.m');

   getf(problem+'\T.m');

   getf(problem+'\W.m');


// inicializar variaveis:

  for t=1:H, [wlt,wct]=size(W(t,1)); wl(t)=wlt; wc(t)=wct; end

   Mc=[]; Mo=[];

   r=zeros(1,N);

   s=zeros(1,N);

   x=zeros(max(wc),N);

   th=zeros(1,N);
```

```
   pi=[];

   rho=[];

   sigma=[];

   t=1;

   k=1;

   stop=0;

   DIR=1;

   i=1;

// constantes:

   TOL=0.001;

   if report_level>1 then

      printf(' ');

      printf('   TOL = %.8f',TOL);

      end

   Inf=1000000;

   zero=10E-6;  //1000000*%eps;


// ****************************************
// Parte Principal do Algoritmo.
// ****************************************
```

```
if report_level>=2 then
   disp('Convergencia da funcao custo:');
   disp(' (1) Q-th = 0');
end
while(stop==0),
    if report_level>=2 then printf('    t = %d.',t); end
    while(k<=K(t) & stop==0),
      if(t>1) then xtak=x(1:wc(t-1),n(t-1,a(n(t,k)))); else xtak=zeros(wc(t),1); end
      [xsol,thtk,pitk,rhotk,sigmatk,feasible]=Solve(t,k,xtak);

      if(~feasible) then
           if(t==1) then stop=1; disp(' ** problema inviavel **');
                    else D=pitk*T(t,k);
                         d=pitk*h(t,k)+rhotk*sigmatk;
                         [Mc,r]=putm([-D -d],Mc,r,t-1,a(n(t,k)));
                         k=a(n(t,k)); t=t-1;
                         if(DIR==1) then i=i+1; end;
                         DIR=0;
                    end,
               end,

      if(feasible)  then x(1:wc(t),n(t,k))=xsol;
```

```
                        th(n(t,k))=thtk;

                        pi(n(t,k),1:wl(t))=pitk;

                        rho(n(t,k),1:r(n(t,k)))=rhotk;

                        sigma(n(t,k),1:s(n(t,k)))=sigmatk;

                        k=k+1;

                   end,

    end,


    if(stop==0 & DIR==1 & t<H) then t=t+1; k=1;

                              else if(t==H) then DIR=0; i=i+1; end,

                                   if(DIR==0) then

                                     if(t>1)  then [Mo,s,stop]=Optcuts(t-1);

                                                   t=t-1; k=1;

                                            else  DIR=1; t=t+1; k=1; i=i+1;

                                    end,
                         end,
    end,

end, // % while

tempo=timer();

if(feasible & report_level>0) then

  Xs=[x(1:wc(1),1); th(1)];

  Xd=zeros(Xs);
```

```
  Xd(find(abs(Xs)>zero))=Xs(abs(Xs)>zero,1); Xd=Xd';

  disp('= = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = ');

  disp(' solucao: '); disp(Xd);

  disp(' objetivo:  z = '+string( [c(1,1)' 0]*Xs+th(:,1)));

  disp(' iteracoes = '+string(i));

  disp(' tempo gasto = '+string(tempo)+'s  ('+string(round(tempo/60))+'min)');

  disp('= = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = ');

end,
```

```
// ****************************************
// Function Solve.
// ****************************************


function [xsol,thh,pii,rhoo,sigmaa,feasible]=Solve(t,k,xt_1)

ctk=c(t,k);

Wtk=W(t,k);

btk=h(t,k)-T(t,k)*xt_1;

[Dtk,dtk]=getm(Mc,r,t,k);

[Etk,etk]=getm(Mo,s,t,k);

rtk=r(n(t,k));

stk=s(n(t,k));

if(stk==0) then stk=1; Etk=zeros(1,wc(t)); etk=0; end,

Msol=[[Wtk; Dtk; Etk] [zeros(wl(t)+rtk,1); -ones(stk,1)]];

bsol=[btk; dtk; etk];

csol=[ctk; 1];

// resolve o subproblema:

     [X,L,w]=simplex(csol,Msol,bsol,weq,wc(t)+1);

if w==%inf then

     feasible=%f;

     pii = L(1,1:wl(t));

     rhoo= L(1,wl(t)+1:wl(t)+rtk);
```

```
     sigmaa= dtk;

     xsol=[]; thh=[];

else

     feasible=%t;

     xsol=X(1:wc(t),1);

     thh= X(wc(t)+1,1);

     pii =   L(1,1:wl(t));

     rhoo=   L(1,wl(t)+1:wl(t)+rtk);

     sigmaa= L(1,wl(t)+rtk+1:wl(t)+rtk+s(n(t,k)));

end,

if report_level==3 then report(); end

if(report_level==2 & ~feasible) then
    printf('   (vert. inviavel: [%d %d]).',t,k);
end
```

```
// ****************************************
// Function Optcuts.
// ****************************************

function [Mo,sn,stop]=Optcuts(z)

added=0;

stop=0;

for j=1:K(z),

    E=[];  e=0;

    for k=desc(z,j),

        E=E+p(n(t,k))/p(n(z,j))*pi(n(t,k),1:wl(t))*T(t,k);

    end,

    for k=desc(z,j),

        e=e+p(n(t,k))/p(n(z,j))*pi(n(t,k),1:wl(t))*h(t,k);

        if(r(n(t,k))>0) then

            [maux,dtk]=getm(Mc,r,t,k);

            e=e+p(n(t,k))/p(n(z,j))*rho(n(t,k),1:r(n(t,k)))*dtk;

        end,

        if(s(n(t,k))>0) then

            [maux,etk]=getm(Mo,s,t,k);

            e=e+p(n(t,k))/p(n(z,j))*sigma(n(t,k),1:s(n(t,k)))*etk;

        end,
```

```
    end,

    Q=e-E*x(1:wc(z),n(z,j));

    szj=s(n(z,j));

    if(szj==0) then [Mo,s]=putm([-E -e],Mo,s,z,j); added=added+1;

               else if(Q-th(1,n(z,j))>TOL) then  [Mo,s]=putm([-E -e],Mo,s,z,j);

                                                  added=added+1;  end
               end

    if(t==2 & report_level>=2) then

       disp(' ('+string(i+1)+') Q-th = '+string(Q)+'-'+string(th(1,n(z,j)))+' = '+string(Q-th(1,n(z,j))));

    end


end

sn=s;

if(t==2 & added==0) then stop=1; end,



// ****************************************
// Function desc.
// ****************************************

function [desc]=desc(t,k)

desc=find(a(n(t+1,1):n(t+1,K(t+1)))==k);
```

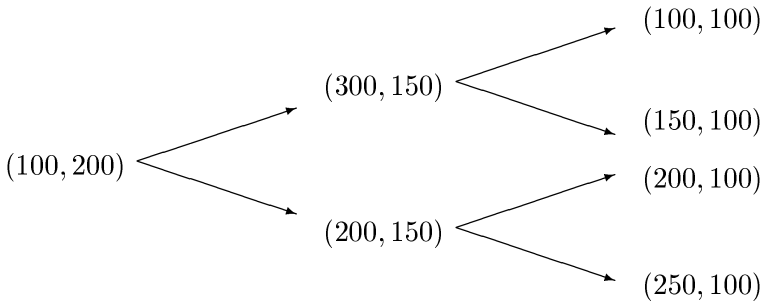
```
// ***************************************
// Function putm.
// ***************************************


function [Mx,nind]=putm(new,Mx,ind,t,k)

new=[new zeros(1,max(wc)+1-length(new))];

fim=sum(ind(1:n(t,k)));

Mx=[Mx(1:fim,:); new; Mx(fim+1:sum(ind),:)];

nind=ind;

nind(1,n(t,k))=nind(1,n(t,k))+1;



// ***************************************
// Function getm.
// ***************************************


function [Mout,Bout]=getm(Mx,ind,t,k)

inicio=sum(ind(1:n(t,k)-1))+1;

fim=sum(ind(1:n(t,k)));

if(inicio<=fim) then Mtk=[Mx(inicio:fim,1:wc(t)+1)];

                else Mtk=[];

                end,

[m1,m2]=size(Mtk);

Mout=Mtk(1:m1,1:m2-1); Mout=Mtk(1:m1,1:wc(t));

Bout=Mtk(1:m1,m2);     Bout=Mtk(1:m1,wc(t)+1);
```

```
// ***************************************
// Function report.
// ***************************************

function []=report()

disp('- - - - - - - - - - - - - - - - - ');

if t==1 then

   disp('('+string(i+1)+')'+' ['+string(t)+' '+string(k)+'] '+'vai.');

else

   if DIR==1 then

      disp('('+string(i)+')'+' ['+string(t)+' '+string(k)+'] '+'vai.');

   else

      disp('('+string(i)+')'+' ['+string(t)+' '+string(k)+'] '+'volta.');

   end

end

if(~feasible) then disp('* vertice inviavel *'); end

disp(csol');

disp([Msol,bsol]);

disp('[x th] ='); disp([xsol' thh]);

disp('pi='); disp(pii);

disp('rho ='); disp(rhoo);

disp('sigma ='); disp(sigmaa);
```

```
if feasible then
   printf(' ');
   if abs(conf)<zero then printf(' Obj = %.3f (0).',obj);
   else printf(' Obj = %.3f (%f).',obj,conf);
   end
   disp(dual*Msol(1:ld,:)<=csol');
end
disp('- - - - - - - - - - - - - - - - - '); input(" ");
```

3.6 Um Exemplo Simples Para Teste do Algoritmo de Decomposição

Na seção 3.5 apresentamos um código em SCILAB para este algoritmo. Aqui, apresentamos um exemplo adaptado de [4] que consiste em um problema simples de 3 estágios no qual um fabricante de aparelhos de ar–condicionado deve satisfazer a demanda de seus clientes por três meses consecutivos. Esta demanda, d, é incerta, enquanto sua capacidade máxima de produção em tempo normal, $\bar{u}$, é declinante. O vetor de estados, $\xi_t^k = (d_t^k, \bar{u}_t^k)$ é modelado segundo uma árvore binomial, ilustrada abaixo:



onde todas as probabilidades de transição têm o mesmo valor 1/2.

O fabricante pode produzir u aparelhos em regime normal, a \$100 por unidade. Pode também, se a produção em tempo normal não for suficiente para satisfazer a demanda, produzir w unidades, até um máximo de 100, em regime de horas extras, a um custo de \$300 por unidade. Pode ainda estocar y unidades, a um custo unitário de \$50 por mês. Estocar, portanto, é mais barato que produzir em regime emergencial. Entretanto, o excedente de produção no terceiro mês será considerado perda, o que implica em um risco para a estocagem.

Com estas especificações, os sub–problemas $Q_t^k(x_{t-1}^{\hat{k}})$ são :

$$\begin{aligned} Q_t^k(x_{t-1}^{\hat{k}}) \;=\; \min \quad & u_t^k + 3w_t^k + 0.5y_t^k + \theta_t^k \\ \text{t/q} \quad & u_t^k + w_t^k - y_t^k = d_t^k, \\ & u_t^k \le \bar{u}_t^k, \\ & w_t^k \le 1, \\ & u_t^k, w_t^k, y_t^k \ge 0. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Mais os cortes de viabilidade e otimalidade, $D^k_{t,j}\, x^k_t \geq d^k_{t,j}$, $E^k_{t,j}\, x^k_t + \theta^k_t \geq e^k_{t,j}$, acrescentados a cada iteração. Listamos abaixo os passos seguidos pelo algoritmo para resolver este problema:

$\langle \mathbf{1} \rangle$ $t = 1,\ \ k = 1:$

$$\begin{array}{rr|l}
\min & u^1_1 + 3w^1_1 + 0.5y^1_1 + \theta^1_1 & u^2_1 = 1, \quad w^2_1 = 0, \quad y^2_1 = 0, \\
\text{t/q} & u^1_1 + w^1_1 - y^1_1 = 1, & \\
 & u^1_1 \leq 2, & \theta^2_1 = 0, \\
 & w^1_1 \leq 1, & \pi^2_1 = (1,0,0), \\
 & \theta^1_1 = 0, & \rho^2_1 = \emptyset, \\
 & u^1_1,\ w^1_1,\ y^1_1 \geq 0. & \sigma^2_1 = \emptyset.
\end{array}$$

$\langle \mathbf{1} \rangle$ $t = 2,\ \ k = 1:$

$$\begin{array}{rr|l}
\min & u^1_2 + 3w^1_2 + 0.5y^1_2 + \theta^1_2 & u^1_2 = 1.5, \quad w^1_2 = 0.5, \quad y^1_2 = 0, \\
\text{t/q} & u^1_2 + w^1_2 - y^1_2 = 2, & \\
 & u^1_2 \leq 1.5, & \theta^1_2 = 0, \\
 & w^1_2 \leq 1, & \pi^1_2 = (3,-2,0), \\
 & \theta^1_1 = 0, & \rho^1_2 = \emptyset, \\
 & u^1_2,\ w^1_2,\ y^1_2 \geq 0. & \sigma^1_2 = \emptyset.
\end{array}$$

$\langle \mathbf{1} \rangle$ $t = 2,\ \ k = 2:$

$$\begin{array}{rr|l}
\min & u^2_2 + 3w^2_2 + 0.5y^2_2 + \theta^2_2 & \text{** Problema Inviável **} \\
\text{t/q} & u^2_2 + w^2_2 - y^2_2 = 3, & \\
 & u^2_2 \leq 1.5, & D^1_1 = \pi^2_2 \cdot T^2_2 = (0,0,1) \\
 & w^2_2 \leq 1, & d^1_1 = \pi^2_2 h^2_2 + \rho^2_2 d^2_2 = 0.5 \\
 & \theta^1_1 = 0, & \\
 & u^2_2,\ w^2_2,\ y^2_2 \geq 0. & \qquad D^1_1 x^1_1 \geq d^1_1
\end{array}$$

$\langle \mathbf{3} \rangle$ $t = 1,\ \ k = 1:$

$$\begin{array}{rr|l}
\min & u^1_1 + 3w^1_1 + 0.5y^1_1 + \theta^1_1 & u^1_1 = 1.5, \quad w^1_1 = 0, \quad y^1_1 = 0.5, \\
\text{t/q} & u^1_1 + w^1_1 - y^1_1 = 1, & \\
 & u^1_1 \leq 2, & \theta^1_1 = 0, \\
 & w^1_1 \leq 1, & \pi^1_1 = (1,0,0), \\
 & -y^1_1 \leq -0.5, & \rho^1_1 = -1.5, \\
 & \theta^1_1 = 0, & \sigma^1_1 = \emptyset. \\
 & u^1_1,\ w^1_1,\ y^1_1 \geq 0. &
\end{array}$$

$\langle\mathbf{3}\rangle$ $t=2,\ k=1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^1+3w_2^1+0.5y_2^1+\theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1+w_2^1-y_2^1=1.5, \\ & u_2^1\leq 1.5, \\ & w_2^1\leq 1, \\ & \theta_1^1=0, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1\geq 0. \end{array}$$

$u_2^1=1.5,\quad w_2^1=0,\quad y_2^1=0,$

$\theta_2^1=0,$

$\pi_2^1=(3,-2,0),$
$\rho_2^1=\emptyset,$
$\sigma_2^1=\emptyset.$

$\langle\mathbf{3}\rangle$ $t=2,\ k=2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^2+3w_2^2+0.5y_2^2+\theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2+w_2^2-y_2^2=2.5, \\ & u_2^2\leq 1.5, \\ & w_2^2\leq 1, \\ & \theta_1^1=0, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2\geq 0. \end{array}$$

$u_2^2=1.5,\quad w_2^2=1,\quad y_2^2=0,$

$\theta_2^2=0,$

$\pi_2^2=(3,-2,0),$
$\rho_2^2=\emptyset,$
$\sigma_2^2=\emptyset.$

$\langle\mathbf{3}\rangle$ $t=3,\ k=1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^1+3w_3^1+0.5y_3^1+\theta_3^1 \\ \text{t/q} & u_3^1+w_3^1-y_3^1=1, \\ & u_3^1\leq 1, \\ & w_3^1\leq 1, \\ & \theta_1^1=0, \\ & u_3^1,\ w_3^1,\ y_3^1\geq 0. \end{array}$$

$u_3^1=1,\quad w_3^1=0,\quad y_3^1=0,$

$\theta_3^1=0,$

$\pi_3^1=(3,-2,0),$
$\rho_3^1=\emptyset,$
$\sigma_3^1=\emptyset.$

$\langle\mathbf{3}\rangle$ $t=3,\ k=2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^2+3w_3^2+0.5y_3^2+\theta_3^2 \\ \text{t/q} & u_3^2+w_3^2-y_3^2=1.5, \\ & u_3^2\leq 1, \\ & w_3^2\leq 1, \\ & \theta_1^1=0, \\ & u_3^2,\ w_3^2,\ y_3^2\geq 0. \end{array}$$

$u_3^2=1,\quad w_3^2=0.5,\quad y_3^2=0,$

$\theta_3^2=0,$

$\pi_3^2=(3,-2,0),$
$\rho_3^2=\emptyset,$
$\sigma_3^2=\emptyset.$

$\langle\mathbf{3}\rangle$ $t=3,\ k=3:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^3+3w_3^3+0.5y_3^3+\theta_3^3 \\ \text{t/q} & u_3^3+w_3^3-y_3^3=2, \\ & u_3^3\leq 1, \\ & w_3^3\leq 1, \\ & \theta_1^1=0, \\ & u_3^3,\ w_3^3,\ y_3^3\geq 0. \end{array}$$

$u_3^3=1,\quad w_3^3=1,\quad y_3^3=0,$

$\theta_3^3=0,$

$\pi_3^3=(3,-2,0),$
$\rho_3^3=\emptyset,$
$\sigma_3^3=\emptyset.$

$\langle \mathbf{3} \rangle$ $t = 3,\ k = 4:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^4 + 3w_3^4 + 0.5y_3^4 + \theta_3^4 \\ \text{t/q} & u_3^4 + w_3^4 - y_3^4 = 2.5, \\ & u_3^4 \le 1, \\ & w_3^4 \le 1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_3^4,\ w_3^4,\ y_3^4 \ge 0. \end{array}$$

** Problema Inviável **

$$D_2^2 = \pi_3^4 \cdot T_4^2 = (0,0,1)$$
$$d_2^2 = \pi_3^4 h_3^4 + \rho_3^4 d_3^4 = 0.5$$
$$D_2^2 x_2^2 \ge d_2^2$$

$\langle \mathbf{4} \rangle$ $t = 2,\ k = 2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 2.5, \\ & u_2^2 \le 1.5, \\ & w_2^2 \le 1, \\ & -y_2^2 \le -0.5, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2 \ge 0. \end{array}$$

** Problema Inviável **

$$D_1^1 = \pi_2^2 \cdot T_2^1 = (0,0,1)$$
$$d_1^1 = \pi_2^2 h_2^2 + \rho_2^2 d_2^2 = 1$$
$$D_1^1 x_1^1 \ge d_1^1$$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 1,\ k = 1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_1^1 + 3w_1^1 + 0.5y_1^1 + \theta_1^1 \\ \text{t/q} & u_1^1 + w_1^1 - y_1^1 = 1, \\ & u_1^1 \le 2, \\ & w_1^1 \le 1, \\ & -y_1^1 \le -0.5, \\ & -y_1^1 \le -1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_1^1,\ w_1^1,\ y_1^1 \ge 0. \end{array}$$

$u_1^1 = 2, \quad w_1^1 = 0, \quad y_1^1 = 1,$

$\theta_1^1 = 0,$

$\pi_1^1 = (3, -2, 0),$
$\rho_1^1 = (0, -3.5),$
$\sigma_1^1 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 2,\ k = 1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^1 + 3w_2^1 + 0.5y_2^1 + \theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1 + w_2^1 - y_2^1 = 1, \\ & u_2^1 \le 1.5, \\ & w_2^1 \le 1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1 \ge 0. \end{array}$$

$u_2^1 = 1, \quad w_2^1 = 0, \quad y_2^1 = 0,$

$\theta_2^1 = 0,$

$\pi_2^1 = (1, 0, 0),$
$\rho_2^1 = \emptyset,$
$\sigma_2^1 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 2,\ k = 2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 2, \\ & u_2^2 \leq 1.5, \\ & w_2^2 \leq 1, \\ & -y_2^2 \leq -0.5, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2 \geq 0. \end{array}$$

$u_2^2 = 1.5, \quad w_2^2 = 1, \quad y_2^2 = 0.5,$

$\theta_2^2 = 0,$

$\pi_2^2 = (3, -2, 0),$
$\rho_2^2 = -3.5,$
$\sigma_2^2 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 3,\ k = 1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^1 + 3w_3^1 + 0.5y_3^1 + \theta_3^1 \\ \text{t/q} & u_3^1 + w_3^1 - y_3^1 = 1, \\ & u_3^1 \leq 1, \\ & w_3^1 \leq 1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_3^1,\ w_3^1,\ y_3^1 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^1 = 1, \quad w_3^1 = 0, \quad y_3^1 = 0,$

$\theta_3^1 = 0,$

$\pi_3^1 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^1 = \emptyset,$
$\sigma_3^1 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 3,\ k = 2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^2 + 3w_3^2 + 0.5y_3^2 + \theta_3^2 \\ \text{t/q} & u_3^2 + w_3^2 - y_3^2 = 1.5, \\ & u_3^2 \leq 1, \\ & w_3^2 \leq 1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_3^2,\ w_3^2,\ y_3^2 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^2 = 1, \quad w_3^2 = 0.5, \quad y_3^2 = 0,$

$\theta_3^2 = 0,$

$\pi_3^2 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^2 = \emptyset,$
$\sigma_3^2 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 3,\ k = 3:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^3 + 3w_3^3 + 0.5y_3^3 + \theta_3^3 \\ \text{t/q} & u_3^3 + w_3^3 - y_3^3 = 1.5, \\ & u_3^3 \leq 1, \\ & w_3^3 \leq 1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_3^3,\ w_3^3,\ y_3^3 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^3 = 1, \quad w_3^3 = 0.5, \quad y_3^3 = 0,$

$\theta_3^3 = 0,$

$\pi_3^3 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^3 = \emptyset,$
$\sigma_3^3 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{5} \rangle$ $t = 3,\ k = 4:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^4 + 3w_3^4 + 0.5y_3^4 + \theta_3^4 \\ \text{t/q} & u_3^4 + w_3^4 - y_3^4 = 2, \\ & u_3^4 \leq 1, \\ & w_3^4 \leq 1, \\ & \theta_1^1 = 0, \\ & u_3^4,\ w_3^4,\ y_3^4 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^4 = 1, \quad w_3^4 = 1, \quad y_3^4 = 0,$

$\theta_3^4 = 0,$

$\pi_3^4 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^4 = \emptyset,$
$\sigma_3^4 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{6} \rangle$ Corte de otimalidade p/ $t = 2, \;\; k = 1$:

$$E_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^1 \cdot T_2^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^3 \cdot T_2^2 = (0,0,3),$$
$$e_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^1 \cdot h_3^1 + \tfrac{1}{2}\pi_3^2 \cdot h_3^2 = 1.75,$$

$$\theta_2^1 \geq -E_2^1 x_2^1 + e_2^1.$$

Corte de otimalidade p/ $t = 2, \;\; k = 2$:

$$E_2^2 = \tfrac{1}{2}\pi_3^3 \cdot T_2^3 + \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot T_2^4 = (0,0,3),$$
$$e_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot h_3^4 + \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot h_3^4 = 4.75,$$

$$\theta_2^2 \geq -E_2^2 x_2^2 + e_2^2.$$

$\langle \mathbf{6} \rangle$ $t = 2, \;\; k = 1$:

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^1 + 3w_2^1 + 0.5y_2^1 + \theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1 + w_2^1 - y_2^1 = 1, \\ & u_2^1 \leq 1.5, \\ & w_2^1 \leq 1, \\ & -3y_2^1 - \theta_2^1 \leq -1.75, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1 \geq 0. \end{array}$$

$u_2^1 = 1.5, \quad w_2^1 = 0, \quad y_2^1 = 0.5,$

$\theta_2^1 = 0.25,$

$\pi_2^1 = (2.5, -1.5, 0),$
$\rho_2^1 = \emptyset,$
$\sigma_2^1 = -1.$

$\langle \mathbf{6} \rangle$ $t = 2, \;\; k = 2$:

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 2, \\ & u_2^2 \leq 1.5, \\ & w_2^2 \leq 1, \\ & -y_2^2 \leq -0.5, \\ & -3y_2^2 - \theta_2^2 \leq -4.75, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2 \geq 0. \end{array}$$

$u_2^2 = 1.5, \quad w_2^2 = 1, \quad y_2^2 = 0.5,$

$\theta_2^2 = 3.25,$

$\pi_2^2 = (3, -2, 0),$
$\rho_2^2 = -0.5,$
$\sigma_2^2 = -1.$

$\langle \mathbf{6} \rangle$ Corte de otimalidade p/ $t = 1, \;\; k = 1$:

$$E_1^1 = \tfrac{1}{2}\pi_2^1 \cdot T_1^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^2 \cdot T_1^2 = (0,0,2.75),$$
$$e_1^1 = \tfrac{1}{2}\pi_2^1 \cdot h_2^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^2 \cdot h_2^2 = 7.75,$$

$$\theta_1^1 \geq -E_1^1 x_1^1 + e_1^1.$$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t = 1, \;\; k = 1$:

$$\begin{array}{ll} \min & u_1^1 + 3w_1^1 + 0.5y_1^1 + \theta_1^1 \\ \text{t/q} & u_1^1 + w_1^1 - y_1^1 = 1, \\ & u_1^1 \leq 2, \\ & w_1^1 \leq 1, \\ & -y_1^1 \leq -0.5, \\ & -y_1^1 \leq -1, \\ & -2.75y_1^1 - \theta_1^1 \leq -7.75, \\ & u_1^1,\ w_1^1,\ y_1^1 \geq 0. \end{array}$$

$u_1^1 = 2, \quad w_1^1 = 0, \quad y_1^1 = 1,$

$\theta_1^1 = 5,$

$\pi_1^1 = (3, -2, 0),$
$\rho_1^1 = (0, -0.75),$
$\sigma_1^1 = -1.$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t=2,\ k=1:$

$$\begin{array}{rr} \min & u_2^1 + 3w_2^1 + 0.5y_2^1 + \theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1 + w_2^1 - y_2^1 = 1, \\ & u_2^1 \le 1.5, \\ & w_2^1 \le 1, \\ & -3y_1^1 - \theta_2^1 \le -1.75, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1 \ge 0. \end{array}$$

$u_2^1 = 1.5, \quad w_2^1 = 0, \quad y_2^1 = 0.5,$

$\theta_2^1 = 0.25,$

$\pi_2^1 = (2.5, -1.5, 0),$
$\rho_2^1 = \emptyset,$
$\sigma_2^1 = -1.$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t=2,\ k=2:$

$$\begin{array}{rr} \min & u_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 2, \\ & u_2^2 \le 1.5, \\ & w_2^2 \le 1, \\ & -y_1^1 \le -0.5, \\ & -3y_1^1 - \theta_2^2 \le -4.75, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2 \ge 0. \end{array}$$

$u_2^2 = 1.5, \quad w_2^2 = 1, \quad y_2^2 = 0.5,$

$\theta_2^2 = 3.25,$

$\pi_2^2 = (3, -2, 0),$
$\rho_2^2 = -0.5,$
$\sigma_2^2 = -1.$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t=3,\ k=1:$

$$\begin{array}{rr} \min & u_3^1 + 3w_3^1 + 0.5y_3^1 + \theta_3^1 \\ \text{t/q} & u_3^1 + w_3^1 - y_3^1 = 0.5, \\ & u_3^1 \le 1, \\ & w_3^1 \le 1, \\ & \theta_3^1 = 0, \\ & u_3^1,\ w_3^1,\ y_3^1 \ge 0. \end{array}$$

$u_3^1 = 0.5, \quad w_3^1 = 0, \quad y_3^1 = 0,$

$\theta_3^1 = 0,$

$\pi_3^1 = (1, 0, 0),$
$\rho_3^1 = \emptyset,$
$\sigma_3^1 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t=3,\ k=2:$

$$\begin{array}{rr} \min & u_3^2 + 3w_3^2 + 0.5y_3^2 + \theta_3^2 \\ \text{t/q} & u_3^2 + w_3^2 - y_3^2 = 1, \\ & u_3^2 \le 1, \\ & w_3^2 \le 1, \\ & \theta_3^2 = 0, \\ & u_3^2,\ w_3^2,\ y_3^2 \ge 0. \end{array}$$

$u_3^2 = 1, \quad w_3^2 = 0, \quad y_3^2 = 0,$

$\theta_3^2 = 0,$

$\pi_3^2 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^2 = \emptyset,$
$\sigma_3^2 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t=3,\ k=3:$

$$\begin{array}{rr} \min & u_3^3 + 3w_3^3 + 0.5y_3^3 + \theta_3^3 \\ \text{t/q} & u_3^3 + w_3^3 - y_3^3 = 1.5, \\ & u_3^3 \le 1, \\ & w_3^3 \le 1, \\ & \theta_3^1 = 0, \\ & u_3^3,\ w_3^3,\ y_3^3 \ge 0. \end{array}$$

$u_3^3 = 1, \quad w_3^3 = 0.5, \quad y_3^3 = 0,$

$\theta_3^3 = 0,$

$\pi_3^3 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^3 = \emptyset,$
$\sigma_3^3 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{7} \rangle$ $t = 3,\ \ k = 4:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^4 + 3w_3^4 + 0.5y_3^4 + \theta_3^4 \\ \text{t/q} & u_3^4 + w_3^4 - y_3^4 = 2, \\ & u_3^4 \leq 1, \\ & w_3^4 \leq 1, \\ & \theta_3^1 = 0, \\ & u_3^4,\ w_3^4,\ y_3^4 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^4 = 1, \quad w_3^4 = 1, \quad y_3^4 = 0,$

$\theta_3^4 = 0,$

$\pi_3^4 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^4 = \emptyset,$
$\sigma_3^4 = \emptyset.$

$\langle \mathbf{8} \rangle$ Corte de otimalidade p/ $t = 2,\ \ k = 1:$

$$E_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^1 \cdot T_2^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^3 \cdot T_2^2 = (0, 0, 2),$$
$$e_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^1 \cdot h_3^1 + \tfrac{1}{2}\pi_3^2 \cdot h_3^2 = 1.75,$$

$$\theta_2^1 \geq -E_2^1 x_2^1 + e_2^1.$$

Corte de otimalidade p/ $t = 2,\ \ k = 2:$

$$E_2^2 = \tfrac{1}{2}\pi_3^3 \cdot T_2^3 + \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot T_2^4 = (0, 0, 3),$$
$$e_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot h_3^4 + \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot h_3^4 = 4.75,$$

$$\theta_2^2 \geq -E_2^2 x_2^2 + e_2^2.$$

$\langle \mathbf{8} \rangle$ $t = 2,\ \ k = 1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^1 + 3w_2^1 + 0.5y_2^1 + \theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1 + w_2^1 - y_2^1 = 1, \\ & u_2^1 \leq 1.5, \\ & w_2^1 \leq 1, \\ & -3y_2^1 - \theta_2^1 \leq -1.75, \\ & -2y_2^1 - \theta_2^1 \leq -1.75, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1 \geq 0. \end{array}$$

$u_2^1 = 1.5, \quad w_2^1 = 0, \quad y_2^1 = 0.5,$

$\theta_2^1 = 0.75,$

$\pi_2^1 = (1.5, -0.5, 0),$
$\rho_2^1 = \emptyset,$
$\sigma_2^1 = (0, -1).$

$\langle \mathbf{8} \rangle$ $t = 2,\ \ k = 2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 2, \\ & u_2^2 \leq 1.5, \\ & w_2^2 \leq 1, \\ & -y_2^2 \leq -0.5, \\ & -3y_2^2 - \theta_2^2 \leq -4.75, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2 \geq 0. \end{array}$$

$u_2^2 = 1.5, \quad w_2^2 = 1, \quad y_2^2 = 0.5,$

$\theta_2^2 = 3.25,$

$\pi_2^2 = (3, -2, 0),$
$\rho_2^2 = -0.5,$
$\sigma_2^2 = -1.$

$\langle \mathbf{8} \rangle$ Corte de otimalidade p/ $t = 1,\ \ k = 1:$

$$E_1^1 = \tfrac{1}{2}\pi_2^1 \cdot T_1^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^2 \cdot T_1^2 = (0, 0, 2),$$
$$e_1^1 = \tfrac{1}{2}\pi_2^1 \cdot h_2^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^2 \cdot h_2^2 = 7.1875,$$

$$\theta_1^1 \geq -E_1^1 x_1^1 + e_1^1.$$

$\langle\mathbf{9}\rangle$ $t=1,\ k=1:$

$$\begin{array}{lr} \min & u_1^1+3w_1^1+0.5y_1^1+\theta_1^1 \\ \text{t/q} & u_1^1+w_1^1-y_1^1=1, \\ & u_1^1\leq 2, \\ & w_1^1\leq 1, \\ & -y_1^1\leq -0.5, \\ & -y_1^1-\theta_1^1\leq -1, \\ & -2.75y_1^1-\theta_1^1\leq -7.75, \\ & -2.25y_1^1-\theta_1^1\leq -7.5, \\ & u_1^1,\ w_1^1,\ y_1^1\geq 0. \end{array}$$

$u_1^1=2,\quad w_1^1=0,\quad y_1^1=1,$

$\theta_1^1=5.25,$

$\pi_1^1=(3,-2,0),$
$\rho_1^1=(0,-1.25),$
$\sigma_1^1=(0,-1).$

$\langle\mathbf{9}\rangle$ $t=2,\ k=1:$

$$\begin{array}{lr} \min & u_2^1+3w_2^1+0.5y_2^1+\theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1+w_2^1-y_2^1=1, \\ & u_2^1\leq 1.5, \\ & w_2^1\leq 1, \\ & -3y_2^1-\theta_2^1\leq -1.75, \\ & -2y_2^1-\theta_2^1\leq -1.75, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1\geq 0. \end{array}$$

$u_2^1=1.5,\quad w_2^1=0,\quad y_2^1=0.5,$

$\theta_2^1=0.75,$

$\pi_2^1=(1.5,-0.5,0),$
$\rho_2^1=\emptyset,$
$\sigma_2^1=(0,-1).$

$\langle\mathbf{9}\rangle$ $t=2,\ k=2:$

$$\begin{array}{lr} \min & u_2^2+3w_2^2+0.5y_2^2+\theta_2^2 \\ \text{t/q} & u_2^2+w_2^2-y_2^2=2, \\ & u_2^2\leq 1.5, \\ & w_2^2\leq 1, \\ & -y_2^2\leq -0.5, \\ & -3y_2^2-\theta_2^2\leq -4.75, \\ & u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2\geq 0. \end{array}$$

$u_2^2=1.5,\quad w_2^2=1,\quad y_2^2=0.5,$

$\theta_2^2=3.25,$

$\pi_2^2=(3,-2,0),$
$\rho_2^2=-0.5,$
$\sigma_2^2=-1.$

$\langle\mathbf{9}\rangle$ $t=3,\ k=1:$

$$\begin{array}{lr} \min & u_3^1+3w_3^1+0.5y_3^1+\theta_3^1 \\ \text{t/q} & u_3^1+w_3^1-y_3^1=0.5, \\ & u_3^1\leq 1, \\ & w_3^1\leq 1, \\ & \theta_3^1=0, \\ & u_3^1,\ w_3^1,\ y_3^1\geq 0. \end{array}$$

$u_3^1=0.5,\quad w_3^1=0,\quad y_3^1=0,$

$\theta_3^1=0,$

$\pi_3^1=(1,0,0),$
$\rho_3^1=\emptyset,$
$\sigma_3^1=\emptyset.$

⟨9⟩ $t = 3, \;\; k = 2:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^2 + 3w_3^2 + 0.5y_3^2 + \theta_3^2 \\ \text{t/q} & u_3^2 + w_3^2 - y_3^2 = 1, \\ & u_3^2 \leq 1, \\ & w_3^2 \leq 1, \\ & \theta_3^2 = 0, \\ & u_3^2,\ w_3^2,\ y_3^2 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^2 = 1, \quad w_3^2 = 0, \quad y_3^2 = 0,$

$\theta_3^2 = 0,$

$\pi_3^2 = (1, 0, 0),$
$\rho_3^2 = \emptyset,$
$\sigma_3^2 = \emptyset.$

⟨9⟩ $t = 3, \;\; k = 3:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^3 + 3w_3^3 + 0.5y_3^3 + \theta_3^3 \\ \text{t/q} & u_3^3 + w_3^3 - y_3^3 = 1.5, \\ & u_3^3 \leq 1, \\ & w_3^3 \leq 1, \\ & \theta_3^3 = 0, \\ & u_3^3,\ w_3^3,\ y_3^3 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^3 = 1, \quad w_3^3 = 0.5, \quad y_3^3 = 0,$

$\theta_3^3 = 0,$

$\pi_3^3 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^3 = \emptyset,$
$\sigma_3^3 = \emptyset.$

⟨9⟩ $t = 3, \;\; k = 4:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_3^4 + 3w_3^4 + 0.5y_3^4 + \theta_3^4 \\ \text{t/q} & u_3^4 + w_3^4 - y_3^4 = 2, \\ & u_3^4 \leq 1, \\ & w_3^4 \leq 1, \\ & \theta_3^4 = 0, \\ & u_3^4,\ w_3^4,\ y_3^4 \geq 0. \end{array}$$

$u_3^4 = 1, \quad w_3^4 = 1, \quad y_3^4 = 0,$

$\theta_3^4 = 0,$

$\pi_3^4 = (3, -2, 0),$
$\rho_3^4 = \emptyset,$
$\sigma_3^4 = \emptyset.$

⟨10⟩ Corte de otimalidade p/ $t = 2, \;\; k = 1:$

$$E_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^1 \cdot T_2^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^3 \cdot T_2^2 = (0, 0, 2),$$
$$e_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^1 \cdot h_3^1 + \tfrac{1}{2}\pi_3^2 \cdot h_3^2 = 1.75,$$

$$\theta_2^1 \geq -E_2^1 x_2^1 + e_2^1.$$

Corte de otimalidade p/ $t = 2, \;\; k = 2:$

$$E_2^2 = \tfrac{1}{2}\pi_3^3 \cdot T_2^3 + \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot T_2^4 = (0, 0, 3),$$
$$e_2^1 = \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot h_3^4 + \tfrac{1}{2}\pi_3^4 \cdot h_3^4 = 4.75,$$

$$\theta_2^2 \geq -E_2^2 x_2^2 + e_2^2.$$

⟨10⟩ $t = 2, \;\; k = 1:$

$$\begin{array}{ll} \min & u_2^1 + 3w_2^1 + 0.5y_2^1 + \theta_2^1 \\ \text{t/q} & u_2^1 + w_2^1 - y_2^1 = 1, \\ & u_2^1 \leq 1.5, \\ & w_2^1 \leq 1, \\ & -3y_2^1 - \theta_2^1 \leq -1.75, \\ & -2y_2^1 - \theta_2^1 \leq -1.75, \\ & u_2^1,\ w_2^1,\ y_2^1 \geq 0. \end{array}$$

$u_2^1 = 1.5, \quad w_2^1 = 0, \quad y_2^1 = 0.5,$

$\theta_2^1 = 0.75,$

$\pi_2^1 = (1.5, -0.5, 0),$
$\rho_2^1 = \emptyset,$
$\sigma_2^1 = (0, -1).$

$\langle \mathbf{10} \rangle$ $t = 2,\ \ k = 2:$

$$\begin{array}{lr}
\min & u_2^2 + 3w_2^2 + 0.5y_2^2 + \theta_2^2 \\
\text{t/q} & u_2^2 + w_2^2 - y_2^2 = 2, \\
& u_2^2 \leq 1.5, \\
& w_2^2 \leq 1, \\
& -y_2^2 - \leq -0.5, \\
& -3y_2^2 - \theta_2^2 \leq -4.75, \\
& u_2^2,\ w_2^2,\ y_2^2 \geq 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
u_2^2 = 1.5, \quad w_2^2 = 1, \quad y_2^2 = 0.5, \\
\theta_2^2 = 3.25, \\
\pi_2^2 = (3, -2, 0), \\
\rho_2^2 = -0.5, \\
\sigma_2^2 = -1.
\end{array}$$

$\langle \mathbf{10} \rangle$ Corte de otimalidade p/ $t = 1,\ \ k = 1:$

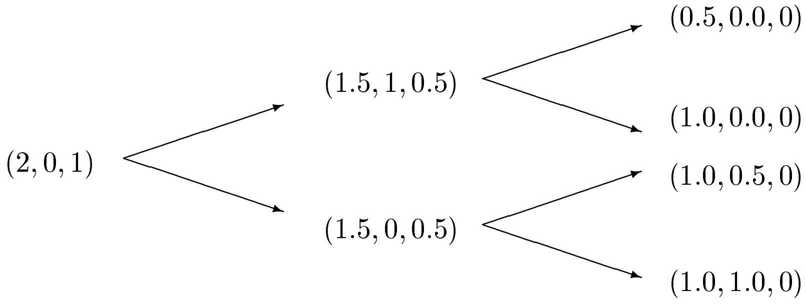
$$\begin{aligned}
E_1^1 &= \tfrac{1}{2}\pi_2^1 \cdot T_1^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^2 \cdot T_1^2 = (0, 0, 2.25), \\
e_1^1 &= \tfrac{1}{2}\pi_2^1 \cdot h_2^1 + \tfrac{1}{2}\pi_2^2 \cdot h_2^2 = 7.5,
\end{aligned}$$

$$-\,E_1^1 x_1^1 + e_1^1 = 5.25 = \theta_1^1 \ \Rightarrow\ PARE.$$

Satisfeito o critério de otimalidade, a solução para a decisão no tempo presente é a solução corrente no nó (1,1):

$$\begin{cases}
\text{Solução: } u_1^1 = 2,\ w_1^1 = 0,\ y_1^1 = 1 \\
\text{Custo do 1º estágio: } \$2.5 \\
\text{Custo esperado futuro: } \mathcal{Q}_2(x_1^1) = \theta_1^1 = \$5.25 \\
\text{Custo esperado total: } \$7.75.
\end{cases}$$

Abaixo, apresentamos também a árvore de soluções (u_t^k, w_t^k, y_t^k) em cada nó:



A solução "completa" do problema pode ser usada para extrair propriedades estatísticas sobre o comportamento esperado do administrador no futuro: por exemplo, ele pode esperar produzir até o máximo de sua capacidade em todos os estágios e sua necessidade de estocagem no segundo estágio pode praticamente ser fixada em 50 unidades, o que pode estimulá–lo a reservar esta capacidade de estocagem antecipadamente. Mas deve estar preparado, entretanto, para uma relativa incerteza na necessidade de produção em horas extras.

Capítulo 4

Construção de Árvores de Cenários

Aqui tratamos do problema de construir uma árvore de cenários a partir de um modelo de estados contínuos que reflita as expectativas do modelador. Examinamos duas estratégias de construção de árvores e propomos uma outra, como síntese das duas.

4.1 Variáveis Antitéticas

Em [48], Kouwenberg expõe alguns métodos usados pelos econometristas para construir cenários, iniciando pelo mais simples, a amostragem aleatória, no qual cada cenário é simplesmente gerado por sucessivas amostras no espaço $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_H$.

A desvantagem do método de amostragem simples é que dificilmente a natureza do processo estocástico escolhido é adequadamente representado em cada nó: tanto a média quanto as covariâncias dos descendentes de cada nó podem estar excessivamente afastados dos valores especificados no modelo estocástico. Um possível efeito deste comportamento pouco suave da árvore de cenários é relatado por Kouwenberg ao aplicar este método ao problema descrito na seção 2.2: a alocação de recursos exibe um comportamento irrealista, variando abruptamente ao longo dos cenários. A variação absoluta média da fração de capital investida em ações é de 37%.

Um método alternativo é sugerido por Kouwenberg, baseado em [8]: para cada nó, aplica–se amostragem simples à metade de seus descendentes. Os resíduos da outra metade recebem valores idênticos, porém de sinais contrários. Isto garante que a média será ajustada segundo a média do modelo (bem como os demais momentos de ordem ímpar). Em seguida, aplica–se um reescalonamento para se conseguir resíduos com a variância desejada. A variação absoluta média do peso das ações caiu então para 12.3%.

Uma terceira alternativa é exigir que os resíduos tenham a média e covariância especificadas pelo modelo. Para cada nó, um modelo de otimização é montado que penaliza os desvios da média e covariância dos resíduos da média e covariância do modelo estocástico, tomando em cada caso um ponto inicial escolhido por amostragem simples. A variação absoluta média da proporção de ações na carteira caiu ainda para 6%. Neste caso, conseguiu–se uma estratégia muito mais estável, com uma alocação inicial em que cada uma das três classes de ativos participa da carteira em um proporção de aproximadamente 1/3.

4.2 A Abordagem de Pflug e Świętanowski

Em [61], os autores descrevem uma formulação matemática do problema de construção de árvores como uma minimização de distâncias em um espaço vetorial normado.

Um cenário em um espaço Ω pode ser descrito como um processo estocástico em $\mathbb{R}^m$. Um processo estocástico, ζ, de H estágios em $\mathbb{R}^m$ pode ser representado matematicamente por uma distribuição P_ζ em $\mathbb{R}^{mH}$.

Uma árvore $\mathcal{T}$ é especificada por uma função de precedência, *pred*, que associa a cada nó terminal i um estado k no tempo t. Assim, $k = pred_t(i)$ é o estado no tempo t do cenário ω que tem i como nó terminal no horizonte H. Uma função $Z : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^m$ é mapeada em pontos de $\mathbb{R}^{mH}$ da seguinte maneira: se o valor de Z no nó (t, k) é z_t^k, agrupamos estes valores em pontos

$$z^i = \left(z_1^{pred_1(i)}, ..., z_{H-1}^{pred_{H-1}(i)}, z_H^i\right).$$

Ou seja, a cada cenário com nó terminal i está associado o vetor $z^i \in \mathbb{R}^{mH}$, que contém toda a história de Z naquele cenário.

Dada uma função $Z : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^m$, uma distribuição de probabilidade P_Z em $\mathbb{R}^{mH}$ com suporte no conjunto discreto $\Sigma_Z = \{z^1, z^2, ...z^{K_H}\}$ é dita $\mathcal{T}$–estruturada. O problema de Pflug–Świętanowski consiste em, dado um processo estocástico ζ em $\mathbb{R}^{mH}$, encontrar os pontos

$Z : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^m$ e a distribuição P_Z com suporte em Σ_Z que melhor aproximam a distribuição P_ζ em relação a alguma norma de um espaço de funções definidas sobre $\mathbb{R}^{mH}$.

Para isto, suponhamos que temos um problema com uma função custo $f(x,u)$, cujo valor depende da nossa decisão $x \in X$ e da realização u do processo estocástico ζ. Suponhamos que queremos minimizar a esperança deste custo, ou seja:

$$\min_x \ F_\zeta(x) = \int_{x \in X} f(x,u)\, dP_\zeta(u) \tag{4.1}$$

Para cada escolha dos pontos Z associamos uma distribuição P_Z cuja massa em z^i é:

$$p_Z^i = \int_{A_Z^i} dP_\zeta(u), \tag{4.2}$$

onde

$$A_Z^i = \{u \in \mathbb{R}^{mH} : ||u - z^i|| = \min_j ||u - z_j||\}, \ \forall i = 1, ..., K_H \tag{4.3}$$

e

$$||u - v|| = \sum_{t=1}^{H} a_t |u_t - v_t|. \tag{4.4}$$

Definimos também o *raio médio* desta partição como

$$D(Z) = \int \min_j ||u - z^i||\, dP_\zeta(u) = \sum_{i=1}^{H} \int_{A_Z^i} ||u - z^i||\, dP_\zeta(u) \tag{4.5}$$

Os autores provam então o seguinte

Lema 7 *Se as $f(x,\cdot)$ são uniformemente Lipschitz, ou seja, se existe $\bar{L}_1 < \infty$ tal que*

$$L_1(f(x,\cdot)) = \inf\{L : |f(x,u) - f(x,v)| \leq L||u - v||\} \leq \bar{L}_1, \ \forall x \in X, \tag{4.6}$$

então

$$\sup_x |F_\zeta(x) - F_Z(x)| = \sup_x \left| \int f(x,u)\, dP_\zeta(u) - \int f(x,u)\, dP_Z(u) \right| \leq \bar{L}_1 \cdot D(Z). \tag{4.7}$$

Dem.:

$$|F_\zeta(x) - F_Z(x)| \quad = \quad \left| \int f(x,u)\, dP_\zeta(u) - \sum_{i=1}^{K_H} p_Z^i f(x, z^i) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{K_H} \int_{A_Z^i} |f(x,u) - f(x,z^i)| \, dP_\zeta(u) \\
&\leq \bar{L}_1 \sum_{i=1}^{K_H} \int_{A_Z^i} ||u - z^i|| \, dP_\zeta(u) \\
&= \bar{L}_1 \cdot D(Z) \quad \diamond
\end{aligned}
$$

Baseado neste lema, os autores propõem a minimização do raio médio dado por (4.5) como estratégia de escolha dos pontos Z para a construção da árvore a partir do processo ζ. Provam, por exemplo, que se P_ζ possui uma densidade de probabilidade integrável no sentido de Lebesgue, então a função $Z \mapsto D(Z)$ é diferenciável. Fornecem ainda dois métodos de minimização local para $D(Z)$:

(a) O Algoritmo Determinístico, caso P_ζ seja completamente conhecida:

1. Inicialize $Z^{(0)}$, $s = 0$.
2. Encontre $A^i_{Z^{(s)}}$, $\forall\, i = 1, ..., K_H$.
3. Seja $z_{t,i}^{(s+1)} \in \text{argmin}_y \left\{ \sum_{\{j:pred_t(j)\}} \int_{A^i_{Z^{(s)}}} |u_t - y| \, dP_\zeta(u) \right\}$, ou seja, $z_{t,i}^{(s+1)}$ é a mediana da distribuição P_ζ restrita a $\bigcup_{\{j:pred_t(j)\}} A^i_{Z^{(s)}}$ na t–ésima coordenada.
4. Pare se $D(Z^{(s)}) \geq D(Z^{(s-1)})$. Caso contrário, faça $s = s + 1$ e volte ao passo 1.

(b) A Aproximação Estocástica, que utiliza uma amostra i.i.d. segundo P_ζ de vetores $u^{(s)} = (u_1^{(s)}, ..., u_H^{(s)})$, $s = 1, 2, ..., S$

1. Inicialize $Z^{(0)}$, $s = 0$, $p_i^{(0)} = 1/K_H$, $\forall\, i = 1...K_H$.
2. Observe a próxima trajetória $u^{(s)}$.
3. Encontre $j \in \{1, 2, ..., K_H\}$ tal que $u^{(s)} \in A^j_{Z^{(s)}}$.
4. Para cada $1 \leq t \leq T$, atualize:

$$
z_{t,pred_t(j)}^{(s+1)} = z_{t,pred_t(j)}^{(s)} + \begin{cases} \frac{a_t}{s} & \text{se } u_t^{(s)} \geq z_{t,pred_t(j)}^{(s)} \\ -\frac{a_t}{s} & \text{se } u_t^{(s)} < z_{t,pred_t(j)}^{(s)} \end{cases}
$$

Conservando o valor dos outros pontos.

5. Faça

$$
\begin{aligned}
p_j^{(s+1)} &= \frac{sp_j^{(s)}+1}{s+1} \\
p_i^{(s+1)} &= \frac{sp_i^{(s)}}{s+1} \quad \text{para } i \neq j
\end{aligned}
$$

6. Se $s < S$, faça $s = s+1$ e volte ao passo 2.

A convergência local dos dois algoritmos é demonstrada em [61]. No caso da aproximação estocástica, parte é demonstrado em [60]. Os autores observam ainda que um algoritmo do tipo *branch and bound* poderia levar ao mínimo global do problema, mas tomaria um tempo muito longo de execução. O resultado teórico é demonstrado em [64].

O caso (b), no qual a ditribuição P_ζ não é conhecida explicitamente, mas cenários podem ser gerados aleatoriamente segundo ela, é certamente o mais comum. Pflug e Świętanowski [61] testam este algoritmo para uma distribuição P_ζ normal bivariada com média $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e matriz de covariâncias $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. O problema é aproximar P_ζ por uma distribuição com suporte discreto e estrutura de árvore ternária. Ou seja, $m = 1$, $H = 2$. Os autores usaram $S = 30000$ iterações e $a_1 = 10$, $a_2 = 1$ na norma (4.4).

Implementamos o algoritmo com um código Scilab em um PC 550MHz e o desempenho ficou aquém do esperado. Para uma árvore pequena como esta de 9 nós, com uma distribuição relativamente simples, tomamos cerca de 20min para completar as 30000 iterações. Pflug e Świętanowski não relatam tempos de execução para árvores maiores. Mas seria interessante conhecê–los para implementações em máquinas paralelas.

Nossa conclusão é que a abordagem de Pflug e Świętanowski é bastante interessante do ponto de vista teórico, mas por demais intrincada e de implementação possivelmente cara demais para as aplicações que temos em mente. Além disto, é pouco flexível. Muitas vezes o que se quer é justamente escolher os valores para alguns ou todos os nós, como fazemos na nossa análise no capítulo 5.

4.3 Probabilidades Estimadas por Amostragem

Considerando os estudos acima, optamos por usar uma estratégia mista: as variáveis antitéticas mostraram ser um método de excelente razão de custo/benefício, tanto nos resultados divulgados por Kouwenberg quanto em nossos testes preliminares.

Além disto, optamos por não reescalonar as amostras para alcançar a variância da distribuição, para preservar o comportamento "agressivo" dos ativos. Para evitar as grandes distorções causadas pela amostragem simples com amostras pequenas, atribuimos pesos calculados por simulação de Monte Carlo, em vez de atribuir probabilidades iguais aos descendentes de cada nó.

Como no método de Pflug e Świętanowski, cada conjunto de pontos suporte define uma partição do tipo (4.3). A probabilidade associada a cada ponto suporte será a massa contida em sua classe da partição, dada pela integral (4.2), que, por sua vez, pode ser avaliada por um estimador do tipo (D.2), onde φ é a função característica de A^i. A variância deste estimador é dada por (D.12):

$$var\,\overline{p_i} = \frac{1}{n_s}(p - p^2) \leq \frac{1}{2n_s} \tag{4.8}$$

Assim, a probabilidade é aproximada por um erro de $1/\sqrt{n_s}$, com 95% de confiança.

Um código simples para Scilab, `mcprob.m`, é apresentado a seguir, tendo como entradas um conjunto de pontos suporte e uma amostra de tamanho n_s extraída de uma distribuição qualquer. Se a distribuição for normal, como usamos no capítulo 5, uma amostra de n_s pontos pode ser obtida por $\texttt{sample} = C \cdot r + \mu$, onde C é a matriz de decomposição de Cholesky da matriz de covariâncias, r é uma matriz com n_s colunas i.i.d. $\sim$ N(0,I) e μ é a média da distribuição.

A função `xtree.m` é um código para geração dos pontos que usa a função `mcprob`. As características da distribuição podem ser armazenadas em uma função. No nosso caso, em `statpar.m`. Usamos uma amostra de tamanho 1000 para cada chamada de `mcprob`, o que implica em um erro absoluto de 0.0316 e um tempo de aproximadamente 1 segundo. Uma árvore como a utilizada no capítulo 5, com 595 nós, levou aproximadamente 4min para ficar pronta.

```
function prob=mcprob(u,sample)

[dim,np]=size(u);

[dim,ns]=size(sample);

prob=zeros(1,np);

for i=1:ns

 [xj,j]=min(sum((diag(sample(:,i))*ones(dim,np)-u).^2,'r'));

 prob(j)=prob(j)+1;

end

prob(find(prob==0))=1;

prob=prob/sum(prob);
```

```
function [u,p]=xtree(problem)

timer();

getf('tools\samplenorm.m');

getf('tools\mcprob.m');

getf(problem+'\modelo\statpar.m');

exec(problem+'\tree_str.m');

u=zeros(2,N);

p=zeros(1,N);

p(1)=1;

printf(' [t k]');

for t=1:H-1

  [mu,cov]=statpar(t);

  [dim,aux]=size(cov);

  for k=1:K(t)

    ndesc=str(t+1);

    v=zeros(dim,ndesc);
```

```
    v(:,1)=[0;log(0.6)-mu(2)];
    v(:,2:(ndesc+1)/2)=samplenorm(cov,(ndesc-1)/2);
    v(:,(ndesc+3)/2:ndesc)=-v(:,2:(ndesc+1)/2);
    u(:,n(t+1,(k-1)*ndesc+1:k*ndesc))=diag(mu)*ones(2,ndesc)+v;
    u(:,n(t+1,(k-1)*ndesc+1:k*ndesc))=diag(mu)*ones(2,ndesc)+v;
    ptk=mcprob(v,samplenorm(cov,1000));
    p(n(t+1,(k-1)*ndesc+1:k*ndesc))=p(n(t,k))*ptk;
    if t==1 | k/10==round(k/10) then printf(' [%d %d]',t,k); end
  end
end
u=exp(u);
resposta=input('Salvar u.m e p.m ?',"string");
if resposta=='sim' | resposta=='yes' then
   unix('del '+problem+'\modelo\u.m');
   write(problem+'\modelo\u.m',u);
   unix('del '+problem+'\modelo\p.m');
   write(problem+'\modelo\p.m',p);
```

```
end

tempo=timer();

disp('tempo: '+string(tempo)+'s  ('+string(round(tempo/60))+'min)');
```

4.4 Arbitragem

Alguns autores, como Klaassen ([45],[46]) revelam alguma preocupação com a possibilidade de *arbitragem* em árvores de cenários. Uma boa exposição do problema de arbitragem em árvores encontra–se em Dert [29], que passaremos a descrever aqui.

Uma *arbitragem* é uma alocação de ativos $x^{(0)}$ tal que:

(i) O investimento inicial é nulo.
(ii) A probabilidade de perda é nula.
(iii) A probabilidade de ganho é positiva.

Estas condições podem ser formuladas em termos de um programa linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \sum_{i=1}^{I}\sum_{s=1}^{S} p_s(1+r_{i,t+1}^{s})X_{it}^{\hat{s}} \\ \text{t/q} & \sum_{i=1}^{I} X_{it}^{\hat{s}} = 0 \\ & \sum_{i=1}^{I} p_s(1+r_{i,t+1}^{s})\, X_{it}^{\hat{s}} \geq 0 \end{array} \tag{4.9}$$

Cada X_i representa um ativo na carteira. Um X_i negativo significa empréstimo tomado ou venda a descoberto de ativos. Se (4.9) possuir uma solução com objetivo positivo, então a árvore construída possui oportunidades de arbitragem, e qualquer investidor racional procurará explorá–la. Esta oportunidade de arbitragem, contudo, não é uma perspectiva realista: mesmo o modelo de distribuição contínua escolhido para descrever o ambiente de decisão tem alta probabilidade de não permitir arbitragens. Oportunidades de arbitragem, se existem, são, quase certamente, resultado de árvores mal construídas.

Uma maneira de eliminar tais oportunidades de arbitragem da árvore escolhida é a que segue: note–se que, se existe uma solução com objetivo positivo para (4.9), então o problema é ilimitado. Isto significa que seu dual:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 0 \cdot \pi_0 + \sum_{s=1}^{S} 0 \cdot \pi_s \\ \text{t/q} & \pi_0 + \sum_{s=1}^{S}(1 + r_{i,t+1,s})\pi_s = -\sum_{s=1}^{S}(1 + r_{i,t+1,s}) \\ & \pi_s \geq 0 \end{array} \tag{4.10}$$

é inviável. Isto pode ser sanado adicionando–se um novo estado $S + 1$ que torna as restrições de (4.10) viáveis. Ou seja, devemos escolher $r_{i,t+1,S+1}$ e π_{S+1} tais que:

$$(1 + r_{i,t+1,S+1}) = \frac{-\pi_0 - \sum_{s=1}^{S}(1 + \pi_s)(1 + r_{i,t+1,s})}{1 + \pi_{S+1}} \tag{4.11}$$

Contudo, árvores de tamanhos "razoáveis" raramente exibirão oportunidades de arbitragem. Para esclarecer este ponto, Dert usa um modelo simplificado, com apenas dois ativos, e calcula a probabilidade de um dos ativos ter sempre um desempenho melhor que o outro. Os retornos dos ativos seguem distribuição multinomial com covariância Σ, de modo que a diferença entre os retornos segue uma normal com média $\mu_1 - \mu_2$ e variância $\sigma_1^2 - 2\sigma_{1,2} + \sigma_2^2$. Portanto, a probabilidade de o primeiro ativo ter melhor retorno que o segundo em uma tentativa é facilmente calculada, digamos, valendo p. A probabilidade de uma arbitragem, dada uma amostra de tamanho S é, portanto, $p^S + (1 - p)^S$. Portanto, a não ser que o modelo estocástico utilizado seja extremamente inadequado, árvores com um número adequado de nós dificilmente possuirão oportunidades de arbitragem.

Acrescentamos ainda que em certos modelos de ALM é possível identificar se houve possibilidades de arbitragem simplesmente verificando se o problema é ilimitado. Se não há restrições quanto ao investimento inicial, uma oportunidade de arbitragem levará o modelo a investir uma quantidade infinita de recursos para obter um ganho infinito. Além disto, usando o método de variáveis antitéticas, dificilmente um ativo sair–se–á sempre melhor que outro em uma amostra, por menor que seja, pois para cada bom desempenho de um ativo com maior volatilidade há sempre o nó oposto, com um mau desempenho.

Capítulo 5

Um Estudo de Caso

Apresentamos aqui uma aplicação do algoritmo de decomposição estocástica linear em multi–estágios apresentado no capítulo (3). O estudo é feito a partir de um grande fundo de pensões brasileiro, com 33740 ativos e 39387 inativos.

5.1 Modelagem do Passivo

Em [54], os autores calcularam uma previsão dos encargos futuros do fundo, incluindo os benefícios já concedidos e os benefícios a conceder, pelos próximos 100 anos. O cálculo foi feito através de simulações do estado de cada um dos 73127 participantes. Foram calculados os encargos prováveis com aposentadoria normal (por idade ou tempo de serviço), aposentadoria por invalidez para o trabalho, pensionistas (beneficiários após a morte do participante) e reembolso de poupança por desligamento do fundo.

Como as mesmas probabilidades de transição são utilizadas para cada indivíduo, o desvio padrão da soma destes encargos, em cada ano, deve ser proporcional a $1/\sqrt{N} \approx 1/270 \approx 0,37\%$. Desta forma, os encargos futuros podem ser considerados como determinísticos, para a análise desenvolvida aqui. As figuras (5.1)–(5.4) mostram a evolução de cada um dos quatro tipos de encargos. Os valores estão em reais. Note–se a predominância dos encargos com aposentadoria normal.

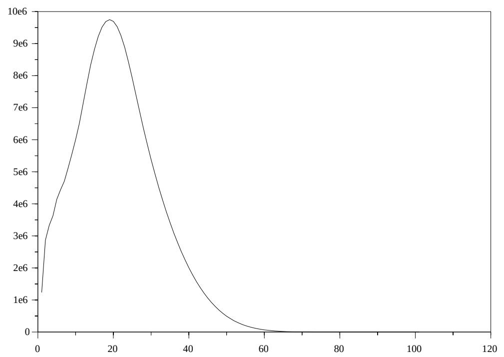


Figura 5.1: Aposentadoria normal.

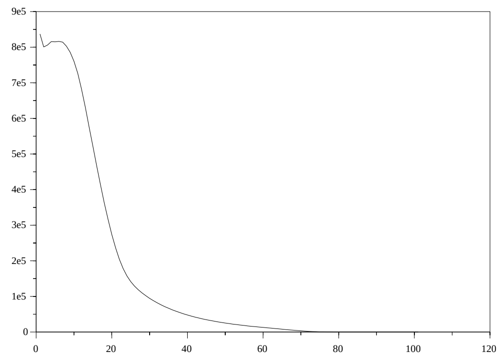


Figura 5.2: Aposentadoria por invalidez.

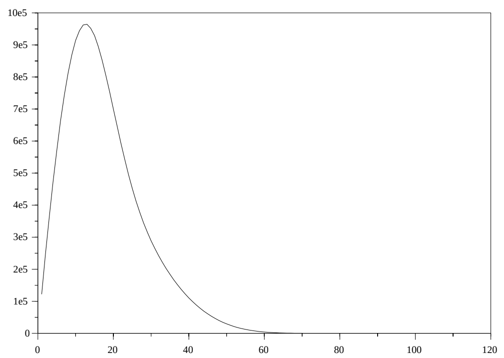


Figura 5.3: Encargos com pensionistas.

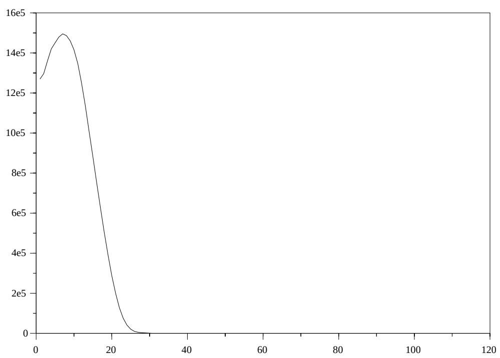


Figura 5.4: Encargos com reembolso de poupança.

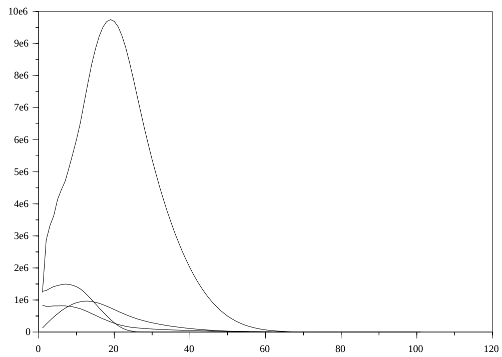


Figura 5.5: Previsão de encargos futuros.

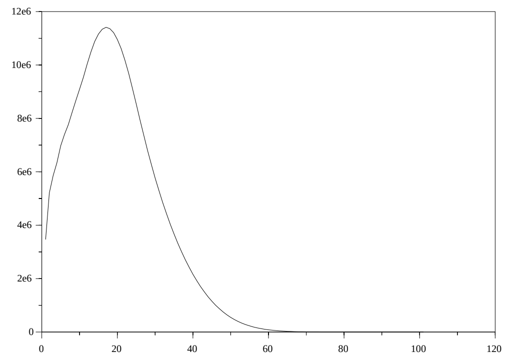


Figura 5.6: Soma dos encargos futuros.

Acima, os quatro gráficos juntos, bem como sua soma, a qual denominaremos B_t. Com base nesta previsão de gastos com benefícios, a patrocinadora faz seu plano de contribuições, para complementar as contribuições dos participantes. Abaixo, gráficos ilustrando, respectivamente, as contribuições dos participantes e da patrocinadora, em função do tempo:

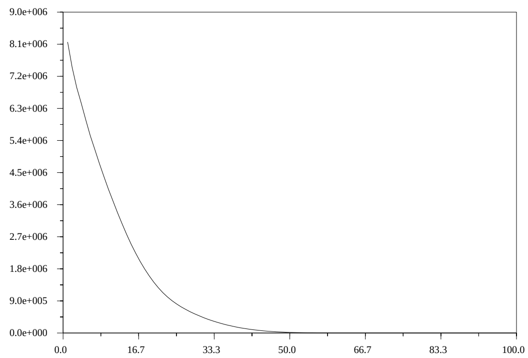


Figura 5.7: Previsão de contribuição dos participantes do fundo.

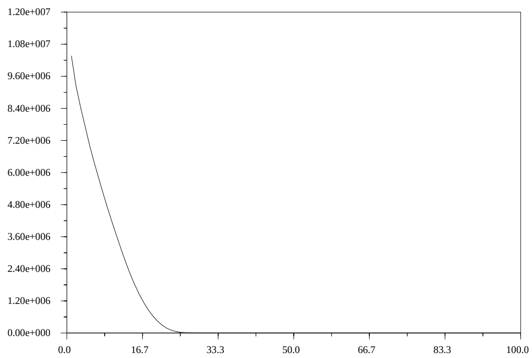


Figura 5.8: Contribuições da patrocinadora.

Abaixo, a soma das duas contribuições, que passaremos a chamar de C_t, e uma comparação das receitas e encargos futuros do fundo, em milhões de reais.

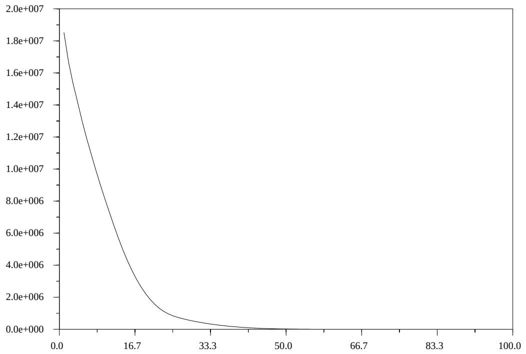


Figura 5.9: Soma das contribuições futuras.

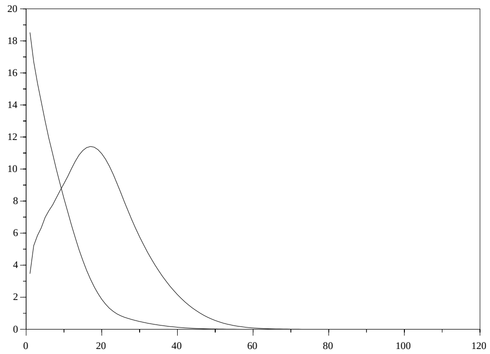


Figura 5.10: Contribuições $\times$ Encargos.

As contribuições, portanto, predominam sobre os encargos até o décimo ano, quando então passa a haver déficit. O saldo de contribuições menos encargos é mostrado na figura 5.11. O déficit máximo é alcançado no 20º ano, correspondente a R\$ 9.088.717,7. Ao todo, temos R\$ $3,096 \cdot 10^8$ de encargos e R\$ $1,822 \cdot 10^8$ de contribuições, resultando em um déficit global de R\$ $1,274 \cdot 10^8$. Contudo, como não faz sentido somar valores de tempos diferentes, podemos corrigir o saldo ano a ano, simulando um investimento, à taxa constante de 6% ao ano. Quando fazemos isto obtemos a curva da figura 5.12, que indica a possibilidade de o fundo saldar suas obrigações em todos os tempos no futuro.

Do ponto de vista atuarial, é suficiente somar todos os saldos trazidos a valor presente à taxa de 6% ao ano, obtendo um superávit atuarial de R\$ 974.312,55. O perfeito equilíbrio de obrigações e receitas é obtido usando–se uma taxa de desconto de $r_0 \approx 5,892\%$.

Temos, portanto, um fundo auto–suficiente, desde que consiga investir seu patrimônio com um retorno real mínimo de 5,892% a.a., o que é uma tarefa relativamente simples de administração de carteiras. Um modelo de programação estocástica pode visar a maximizar o retorno da carteira, mas com o indispensável cuidado de não perder a condição de equilíbrio do fundo. Se denotarmos por A_t o total de ativos do fundo em um certo tempo t e por Y_t a soma

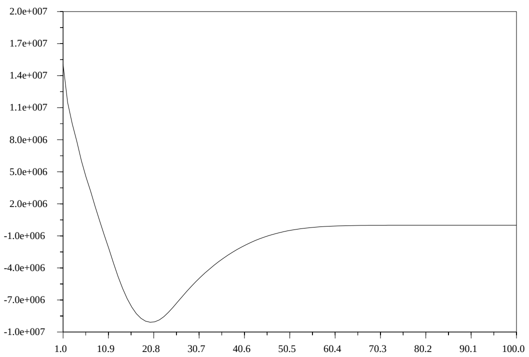


Figura 5.11: Contribuições − Encargos.

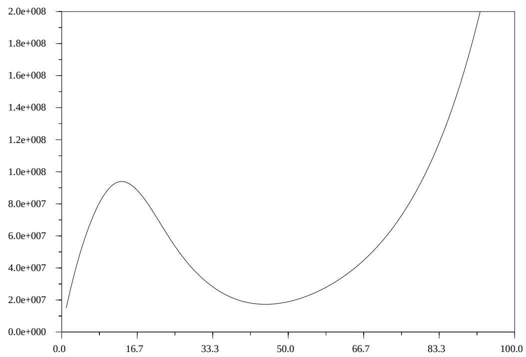


Figura 5.12: Saldo corrigido anualmente.

dos déficits futuros trazidos a valor presente a uma taxa 6%:

$$Y_t = \sum_{\tau=t}^{\infty} \frac{1}{(1,06)^{\tau-t}} \cdot \{B_\tau - C_\tau\} \tag{5.1}$$

esta condição de equilíbrio em cada tempo pode ser traduzida por:

$$A_t \geq Y_t \tag{5.2}$$

A partir disto, queremos maximizar uma carteira de ativos ao longo de um certo horizonte de tempo H.

5.2 Modelo Estatístico de Ativos

Os estudos de programação estocástica geralmente utilizam um modelo do tipo descrito no apêndice C. Contudo, dada a situação de transição da economia brasileira, é improvável que um modelo de auto–regressão linear modele adequadamente os cenários futuros da economia. Seria necessário um modelo preditivo mais sofisticado para fazê–lo. Como neste trabalho não estamos enfatizando o aspecto estatístico, que por si só merece um estudo cuidadoso, optamos por usar um modelo mais simples, baseado nas tendências atuais do mercado financeiro, com horizonte H=4 anos e 2 ativos: renda fixa e ações. Estes ativos têm retornos log–normais:

$$\log\left(\frac{X_{it}}{X_{i,t-1}}\right) \sim N(\mu_t, \Sigma_t), \tag{5.3}$$

Para escolher os parâmetros, usamos prognósticos de especialistas encontrados em publicações especializadas. Assim, as médias de retorno da renda fixa e variável são de 14% e 35%, respectivamente. Para os anos seguintes, escolhemos um decaimento linear da renda fixa: $\theta_1 = [1.14\ 1.13\ 1.12\ 1.11]$, e um decaimento da renda variável para níveis históricos, já que não podemos fazer previsões seguras para horizontes maiores que 1 ano: $\theta_2 = [1.35\ 1.25\ 1.20\ 1.20]$. Quanto às variâncias, escolhemos 1.5% como desvio padrão para a renda fixa e [0.175 0.30 0.30 0.30] para a renda variável, com covariâncias nulas. Como estes são parâmetros da log–normal, os parâmetros da normal correspondentes são calculados por:

$$\sigma^2 = \log\left(\frac{\rho^2}{\theta^2} + 1\right) \tag{5.4}$$

$$\mu = \log\frac{\theta^2}{\sqrt{\rho^2 + \theta^2}} \tag{5.5}$$

Com estas escolhas, temos

$$(\mu_{it}) = \begin{bmatrix} 0.1309417 & 0.1221295 & 0.1132390 & 0.1042687 \\ 0.2917725 & 0.1951425 & 0.1520092 & 0.1520092 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

e

$$(\sigma_{it}) = \begin{bmatrix} 0.0131567 & 0.0132740 & 0.0133940 & 0.0135130 \\ 0.1290899 & 0.2366478 & 0.2462206 & 0.2462206 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

5.3 Estrutura da Árvore de Cenários

Começamos com uma estrutura de árvore igual à utilizada por Cariño et al. em [8], [9] e [10], descrita pelo vetor

$$\mathrm{str} = [\,1\ \ 8\ \ 4\ \ 4\ \ 2\,]. \tag{5.8}$$

Portanto, com 1, 8, 32, 128 e 256 nós em cada respectivo estágio, em um total de 256 cenários e 425 nós. Os intervalos entre os estágios são todos de 1 ano.

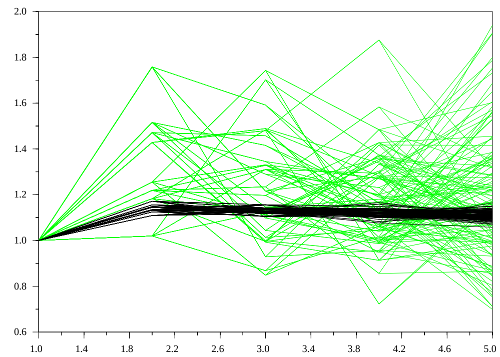


Figura 5.13: Árvore de cenários para os retornos dos ativos.

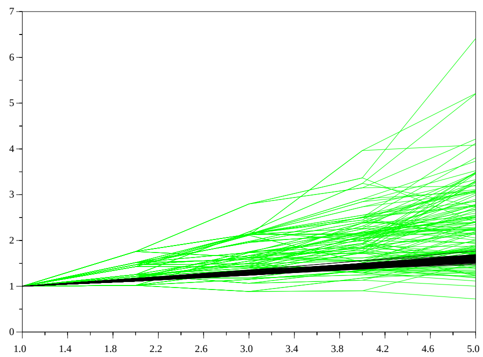


Figura 5.14: Árvore de retornos acumulados.

5.4 Modelo de Otimização

Usando o critério de otimizar o retorno da carteira e a prioridade de manter o equilíbrio atuarial do fundo, podemos estabelecer cada subproblema (3.4) como sendo

$$\text{Max} \quad xh_{1t}^{k} + xh_{2t}^{k}, \tag{5.9}$$

$$(1+r_{1t}^{k})\, xh_{1,t-1}^{\hat{k}} - xh_{1t}^{k} + \alpha_s\, xs_{2t}^{k} - \alpha_b\, xb_{2t}^{k} + \{C_t - B_t\} = 0 \tag{5.10}$$

$$(1+r_{2t}^{k})\, xh_{2,t-1}^{\hat{k}} - xh_{2t}^{k} - xs_{2t}^{k} + xb_{2t}^{k} = 0 \tag{5.11}$$

$$A_t^k = (1+r_{1t}^{k}) xh_{1,t-1}^{\hat{k}} + (1+r_{2t}^{k}) xh_{2,t-1}^{\hat{k}} + C_t - B_t \tag{5.12}$$

$$A_t^k \geq Y_t \tag{5.13}$$

$$xh_{1t}^{k},\ xh_{2t}^{k},\ xb_{2t}^{k},\ xs_{2t}^{k} \geq 0, \quad t = 1, ..., H, \quad k = 1, ..., K_t. \tag{5.14}$$

Por convenção, no estágio $t = 1$, as variáveis de índice $t = 0$ são nulas.

5.5 Resolução do Modelo Básico

Com as especificações do modelo, construímos uma árvore de cenários pelo método descrito no capítulo 4. O resultado é mostrado na figura 5.13. A faixa escura ao centro é formada pelos cenários de retorno da renda fixa. Na figura 5.14 mostramos a árvore de retornos acumulados até o 5º estágio.

Usamos o algoritmo descrito na seção 3.5 para resolver o problema estocástico correspondente a (5.9)–(5.14), com tolerância de erro absoluto na função objetivo de 0.001 (R$1.000,00). A figura 5.15 mostra a evolução dos ativos na carteira. A figura 5.17 mostra a evolução do total de ativos. A linha mais escura é Y_t, que funciona como cota mínima para os ativos. O tempo de execução foi de 4 minutos.

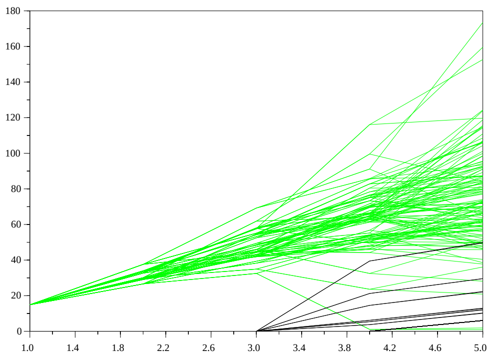


Figura 5.15: Evolução da renda fixa e variável.

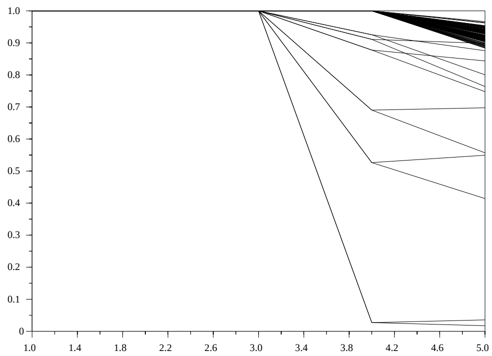


Figura 5.16: Participação da renda variável.

Na figura 5.16 mostramos a evolução da fração de ações na carteira. As proporções mostradas no último estágio não são significativas. São frutos de "end effects", distorções nos nós finais provocadas pela modelagem. No nosso caso, como não haverá retorno sobre investimentos em renda variável após o 5º estágio, o algoritmo aloca tudo em renda fixa, que neste modelo não paga custos de transação. Várias alternativas são propostas na literatura para lidar com estes efeitos, como em [38] e [48].

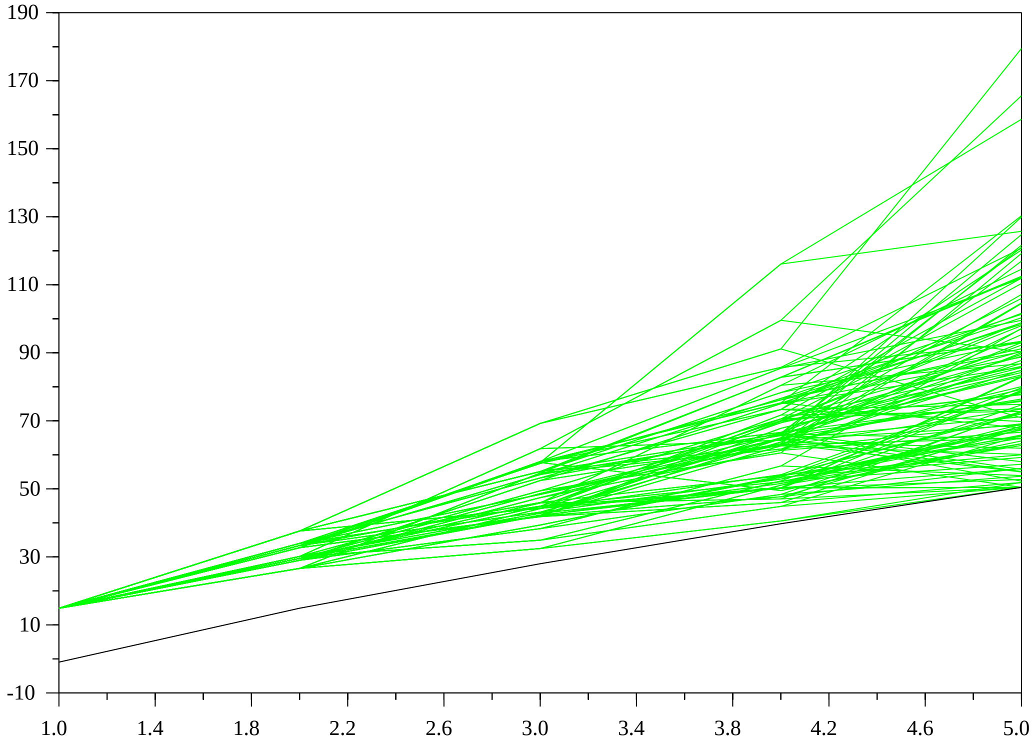


Figura 5.17: Evolução do total de ativos.

5.6 Situações Críticas

Apenas alguns nós no estágio 4 obrigam o administrador a mudar para a renda fixa. Com exceção destes, o algoritmo sempre escolhe comprar o máximo possível de ações, pois estas têm maior expectativa de retorno. Esta é uma solução trivial que pode ser irrealista, pois a árvore de cenários não está refletindo adequadamente o risco associado a se investir todo o patrimômio em renda fixa. Para superar isto, poderíamos aumentar o tamanho da árvore, a fim de obter nós em *situações críticas* ou de *stress*, que modelem mais adequadamente os riscos envolvidos. Isto, porém, torna o problema grande demais. É preferível incluir estes nós de forma direta na construção da árvore. As probabilidades são ajustadas segundo o método do capítulo 4.

Assim, construímos uma árvore de estrutura

$$str = [1\ 9\ 5\ 3\ 3]$$

e introduzimos nós em que a perda é de 99% na renda fixa. Sem dúvida, um bom motivo para ter cautela com este investimento.

A figura 5.18 traz a árvore de evolução dos ativos nesta situação. Note–se que agora a composição da renda variável tem a estrutura próxima de uma "teia", árvore com nós recombinantes. A composição inicial passou a ser 67,41% em renda variável, em vez de 100%, e uma média de 42,8% no segundo estágio. Como mostra a figura 5.19, a fração de renda fixa no segundo estágio se concentra em torno de 57%. Outros valores foram usados para retorno "crítico", como 0.1, 0.4, 0.5, 0.6 e 0.7. O resultado final não se altera muito. Para 0.7, perda de 30%, a composição inicial é de 71,97%. Nas figuras 5.20 e 5.21, temos as árvores de ativos e frações da renda variável na carteira. Totalmente similares ao caso anterior. Assim, concluímos que uma alocação inicial de 67% em renda variável é, segundo este modelo, uma alocação recomendável para o fundo.

5.7 Introduzindo Derivativos

O que acontece se a regulamentação sobre os fundos de pensão impõe restrições sobre a composição da carteira de ativos ? Fizemos um teste impondo cotas máxima e mínima para a fração

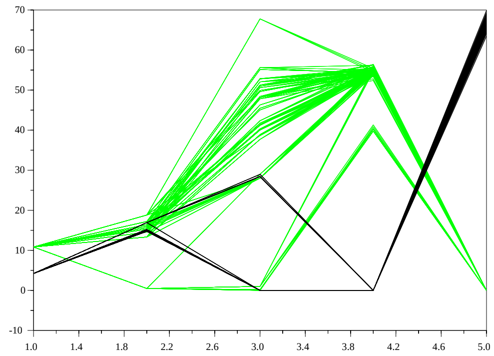


Figura 5.18: Evolução da renda fixa e variável.

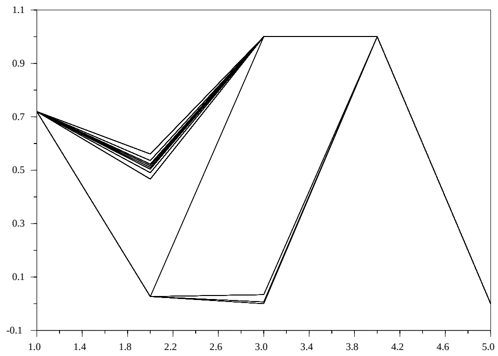


Figura 5.19: Fração da renda variável.

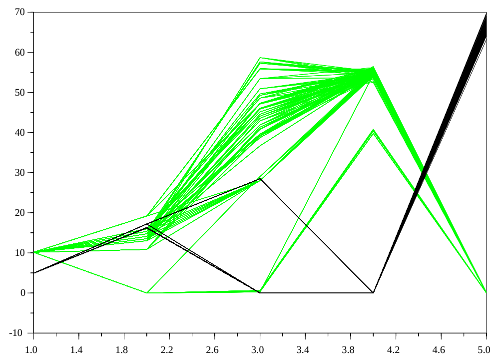


Figura 5.20: Evolução da renda fixa e variável.

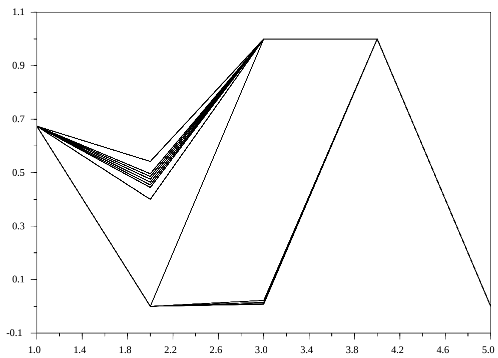


Figura 5.21: Fração da renda variável.

de renda variável na carteira:

$$0.25 \cdot A_t^k \leq xh_{2t}^k \leq 0.75 \cdot A_t^k \tag{5.15}$$

Quando o *stress* é de 30% de perda, nada se altera. A solução é a mesma da situação acima. Quando o *stress* é de 40% de perda ou mais, entretanto, o problema torna–se simplesmente inviável. Não é possível satisfazer a restrição 5.13 em todas as situações.

Uma alternativa é introduzir a possibilidade de compra de *puts* (opções de venda) européias, com maturação de um ano, no primeiro e segundo estágios. Se xp_t^k unidades da *put* são compradas em $t = 1, 2$, a equação 5.10 torna–se

$$(1+r_{1t}^k)\, xh_{t-1}^{\hat{k}} - xh_{1t}^k + \alpha_s\, xs_{2t}^1 - \alpha_b\, xb_{2t}^1 - put_1 \cdot xp_1 + \{C_t - B_t\} = 0 \tag{5.16}$$

em $t = 1$,

$$(1+r_{1t}^k)\, xh_{t-1}^{\hat{k}} - xh_{1t}^k + \alpha_s\, xs_{2t}^k - \alpha_b\, xb_{2t}^k - put_2 \cdot xp_2^k + (Xp_1 - (1+r_{22}^k))^+ xp_1 + \{C_t - B_t\} = 0 \tag{5.17}$$

para $t = 2$, e

$$(1+r_{1t}^k)\, xh_{t-1}^{\hat{k}} - xh_{1t}^k + \alpha_s\, xs_{2t}^k - \alpha_b\, xb_{2t}^k + (Xp_2 - (1+r_{23}^k))^+ xp_2^k + \{C_t - B_t\} = 0 \tag{5.18}$$

em $t = 3$. Xp_1 e Xp_2 são os preços de venda de uma unidade de renda variável comprada por R\$1,00 em $t = 1$ e $t = 2$, respectivamente, e put_t é o preço da *put* no tempo t. No nosso experimento escolhemos $Xp_1 = Xp_2 = 1$, ou seja, uma *put* que garante que o valor atual da renda variável não decairá, decorrido um ano.

O preço da *put* pode ser calculada com a fórmula de Black–Scholes:

$$put = Xp\, e^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{5.19}$$

$$d_1 = \frac{\log(S/Xp) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5.20}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{5.21}$$

onde σ é a *volatilidade* do ativo objeto, T é o prazo de maturação da *put*, r é a taxa de retorno livre de risco (ou o *drift* do ativo, como é o nosso caso) e S é o preço atual do ativo. Usando os desvios padrões como volatilidades e as médias de retorno da renda variável como *drift*, temos

$$put_1 = 0.0012436, \quad put_2 = 0.0297963 \tag{5.22}$$

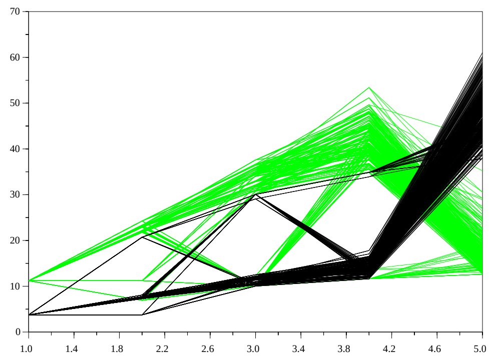


Figura 5.22: Evolução da renda fixa e variável.

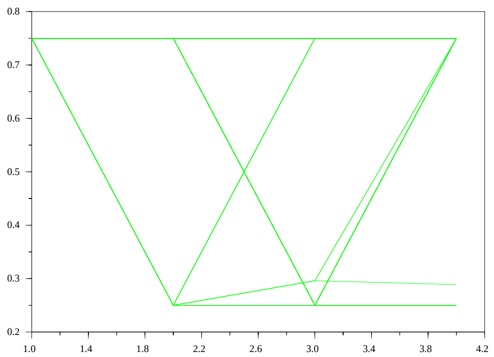


Figura 5.23: Fração da renda variável.

Ou seja, no primeiro estágio, para cada opção de venda de R\$1 milhão da renda variável no prazo de um ano, pagamos R\$1.243,6 no primeiro estágio e R\$29.7796,3 no segundo estágio.

Se implementamos este modelo com *stress* de 30% de perda, nada se altera em relação às soluções anteriores. Com *stress* de 50%, o problema passa a ser viável com a introdução das *puts*. Os cenários de evolução de ativos e da participação da renda variável são mostradas nas figuras 5.22 e 5.23.

A alocação inicial é de 75% em renda variável, o máximo permitido, e a solução segue alternando entre o máximo e o mínimo. Se usarmos um *stress* de 99% de perda, a alocação inicial praticamente não se modifica.

Acrescentamos que é possível estender o modelo de média–variância de Markowitz para incluir opções na carteira, como em feito em Dunder [31]. Basicamente, passa–se a usar um critério de média–variância–assimetria, no qual os momentos relativos às opções podem ser calculados em termos dos momentos dos ativos envolvidos. A vantagem da abordagem por otimização estocástica é que permite a modelagem dos riscos específicos corridos pelo fundo, como é o caso do risco de insolvência.

No apêndice B discutimos ainda a alternativa proposta por Ron Dembo, que se abstém de resolver o problema estocástico original e apresenta uma estratégia que coordena as soluções obtidas sob diversos cenários determinísticos.

Capítulo 6

Conclusão

Julgamos que este trabalho oferece boas razões para considerar a programação estocástica com decomposição de Benders uma ferramenta adequada para se responder a pergunta:

"Como investir os recursos de um fundo de pensões ?"

A abordagem mostra–se flexível e eficiente para esta tarefa. A capacidade de implementação do algoritmo também se revela compatível com o objetivo. Neste trabalho, o exemplo utilizado foi de uma árvore com 595 nós, cada nó contendo um subproblema de 5 variáveis e 4 equações, totalizando 2975 variáveis e 2380 equações. Nos diversos experimentos utilizados, o tempo de execução variou de 4 a 20 minutos. Considerando os recursos utilizados para estes experimentos, avaliamos que modelos mais complexos podem ser resolvidos em tempo razoável em situações realistas.

Possíveis direções para pesquisas futuras incluem a comparação de desempenho do algoritmo de decomposição estocástica com: (a) o modelo de Markowitz; (b) o modelo de coordenação de soluções para cenários isolados, de Dembo; (c) a estratégia heurística de Cornelius Dert. A possibilidade de paralelização do algoritmo esteve além dos recursos deste autor, mas é sem dúvida uma linha de ação interessante a ser seguida.

Além disto, uma maior investigação dos métodos de construção de árvores de cenários, e seus efeitos sobre a solução final, tanto por experimentos computacionais quanto por métodos teóricos, ainda é necessária e relativamente escassa na literatura. Seria interessante saber exatamente o quanto a solução final depende dos valores gerados para os nós da árvore. Talvez, como no caso da programação linear comum, seja possível utilizar os multiplicadores duais obtidos em cada nó para realizar uma análise de sensibilidade da solução. Técnicas bem estabelecidas de análise pós–otimização, em geral, também aguardam um maior desenvolvimento.

Finalmente, não obstante as possibilidades de melhoramentos vários, a área parece estar madura para o desenvolvimento de um sistema integrado de análise do passivo e do ativo de um fundo de pensões. Dadas as observações feitas na introdução deste trabalho, consideramos que o desenvolvimento de um tal sistema seria de relevante valor econômico e social para o país.

Apêndice A

Versão Matlab do Código de Decomposição

```
function [x,th,pi]=stocdec(problem,report)


if nargin('stocdec')==1 report=0; end


% ****************************************
% Inicializa Funções e Variáveis.
% ****************************************


% adicionar problema corrente ao topo da lista de paths

  addpath(strcat('c:\MATLABR11\work\',problem),'-begin');


% ler estrutura da arvore, parametros e vetor de estados

  paramet;
```

```
  tree_str;

% inicializar variaveis:

   global w1 w2 Mc Mo r s x th pi rho sigma t k DIR i;

   [w1,w2]=size(W(1,1));

   Mc=[]; Mo=[];

   r=zeros(1,N);

   s=zeros(1,N);

   x=zeros(w2,N);

   th=zeros(1,N);

   pi=[];

   rho=[];

   sigma=[];

   t=1; k=1;

   stop=0;

   DIR=1;

   i=1;
```

```
% constantes:

   global Inf TOL zero;

   Inf=1000000;

   TOL=0.01;

   zero=10^(-10);  %1000000*%eps;



% ****************************************
% Rotina Principal do Algoritmo.
% ****************************************

t1=cputime;

InitFun

disp('Convergencia da funcao custo:');
disp(' (0) Q-th = 0');

while stop==0

    fprintf('    t = %d.\n',t);

    while k<=K(t) & stop==0

      if t>1 xt_1=x(:,n(t-1,a(t,k))); else xt_1=zeros(w2,1); end
```

```
  [xsol,thh,pii,rhoo,sigmaa,feasible]=Solve(t,k,xt_1);

  if feasible==3, return, end,

  if ~feasible

       if t==1   stop=1;  disp(' ** problema inviavel **');

          else
                 D=pii*T(t,k);
                 d=pii*h(t,k)+rhoo*sigmaa;
                 [Mc,r]=putM([-D -d],t-1,a(t,k),Mc,r);
                 k=a(t,k); t=t-1;
                 if DIR==1 i=i+1; end;
                 DIR=0;
           end
  end


  if  feasible   x(:,n(t,k))=xsol;
                 th(n(t,k))=thh;
                 pi(n(t,k),1:w1)=pii;
                 rho(n(t,k),1:r(n(t,k)))=rhoo;
                 sigma(n(t,k),1:s(n(t,k)))=sigmaa;
                 k=k+1;
           end

end % while


if stop==0 & DIR==1 & t<H  t=t+1; k=1;

   else if t==H  DIR=0; i=i+1; end
```

```
          if DIR==0

                if t>1  [Mo,s,stop]=OptCuts(t-1);

                        t=t-1; k=1;

                  else  DIR=1; t=t+1; k=1; i=i+1;

                  end
          end

    end

end % while

t2=cputime;

if feasible

   X=[x(:,1); th(1)];
   Xd=zeros(size(X));
   Xd(find(abs(X)>zero))=X(find(abs(X)>zero))';
   fprintf('\n\n= = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = =\n');
   fprintf('\n solucao:');
   for j=1:w2, fprintf('  %g',Xd(j,1)); end; fprintf('.\n\n');
   fprintf(' theta: %g.\n\n',th(:,1));
   fprintf(' objetivo: z = %g.\n\n',[c(1,1)' 0]*X+th(:,1));
   fprintf(' iteracoes = %d.\n',i);
   fprintf(' tempo gasto = %gs.\n',t2-t1);
   fprintf('\n = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = = =\n\n');

end,
```

```
% ****************************************
% Função Solve.
% ****************************************


function [xsol,thh,pii,rhoo,sigmaa,feasible]=Solve(t,k,xt_1)

global r s Mc Mo n w1 w2 wi zero DIR i;

ctk=c(t,k);
Wtk=W(t,k);
btk=h(t,k)-T(t,k)*xt_1;

[Dtk,dtk]=getM(r,Mc,t,k);
[Etk,etk]=getM(s,Mo,t,k);
rtk=r(n(t,k));
stk=s(n(t,k));
if(stk==0)  stk=1; Etk=zeros(1,w2); etk=0; end,

Msol=[[Wtk; Dtk; Etk] [zeros(w1+rtk,1); -ones(stk,1)]];
bsol=[btk; dtk; etk];
csol=[ctk; 1];

[tam,compr]=size(Msol);

cis=[zeros(w2,1); -Inf];
css=[];

% * testa a viabilidade *

     Mv=[Msol eye(tam,tam) -eye(tam,tam)];
```

```
     civ=[cis; zeros(2*tam,1)]; csv=[];
     cv=[zeros(w2+1,1); ones(2*tam,1)];
     [Xv,Lv]=lp(cv,Mv,bsol,civ,csv,[],wi);


if abs(cv'*Xv)>zero

     feasible=0;

     pii =-Lv(1:w1,1)';
     if rtk>0, rhoo=-Lv(w1+1:w1+rtk,1)';
         else  rhoo=0; end
     if isempty(dtk), sigmaa=0; else sigmaa=dtk; end
     xsol=[]; thh=[];

else

     feasible=1;

     [Xtk,lgr]=lp(csol,Msol,bsol,cis,css,[],wi);
     xsol=Xtk(1:w2,1);
     thh=Xtk(w2+1,1);

     pii =-lgr(1:w1,1)';
     rhoo=-lgr(w1+1:w1+rtk,1)';
     sigmaa=-lgr(w1+rtk+1:w1+rtk+s(n(t,k)),1)';

end,


report=0;

if report==0 & ~feasible
```

```
    fprintf('   (vert. inviavel: [%d %d]).\n',t,k);
    end

if(report==1)

   disp('- - - - - - - - - - - - - - - - - ');

   if DIR==1  direc='vai.'; else direc='volta.'; end
   fprintf('(%d)  [%d %d] %s \n',i,t,k,direc);

   if ~feasible
        disp(' * vertice inviavel * ');
        disp('corte:'); disp([pii*T(t,k) pii*h(t,k)+rhoo*sigmaa]); end

   disp(csol');
   disp([Msol,bsol]);
   disp('[x th] ='); disp([xsol' thh]);

   disp('pi='); disp(pii);
   disp('rho ='); disp(rhoo);
   disp('sigma ='); disp(sigmaa);
   fprintf('\nObj = %.8f\n\n',csol'*[xsol; thh]);
   disp('- - - - - - - - - - - - - - - - - ');
   key=input('> ');
   if key==1, feasible=3; end,
end,
```

```
% ****************************************
% Função OptCuts.
% ****************************************

function [Mo,sn,stop]=OptCuts(z)

global K w1 w2 pi n p t r Mc Mo rho sigma s x th TOL i;

added=0;

stop=0;

for j=1:K(z)

    E=zeros(1,w2);  e=0;

    for k=desc(z,j)

        E=E+p(t,k)/p(z,j)*pi(n(t,k),1:w1)*T(t,k);

    end

    for k=desc(z,j)

        e=e+p(t,k)/p(z,j)*pi(n(t,k),1:w1)*h(t,k);

        if r(n(t,k))>0

           [maux,dtk]=getM(r,Mc,t,k);

           e=e+p(t,k)/p(z,j)*rho(n(t,k),1:r(n(t,k)))*dtk;
```

```
        end

        if s(n(t,k))>0

           [maux,etk]=getM(s,Mo,t,k);

           e=e+p(t,k)/p(z,j)*sigma(n(t,k),1:s(n(t,k)))*etk;

        end

    end

    Q=e-E*x(:,n(z,j));
    if t==2
    fprintf(' (%d) Q-th = %g - %g = %g\n',i,Q,th(1,n(z,j)),Q-th(1,n(z,j)));
    end

    szj=s(n(z,j));
    if szj==0  [Mo,s]=putM([-E -e],z,j,Mo,s); added=added+1;

               else if Q-th(1,n(z,j))>TOL  [Mo,s]=putM([-E -e],z,j,Mo,s);

                                           added=added+1;  end
    end

end

sn=s;

if t==2 & added==0, stop=1; end
```

Apêndice B

A Alternativa de Dembo

B.1 Otimização por Cenários

Em ([24]–[27]), Ron Dembo, fundador da Algorithmics Research, propõe uma abordagem alternativa a problemas de programação estocástica. Sua idéia pode ser exposta como segue: suponha um problema de otimização estocástica com a seguinte formulação:

$$\begin{array}{ll} \min & \text{“}c_u x\text{”} \\ s.t. & \text{“}A_u x = b_u\text{”} \\ & A_d x = b_d \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{B.1}$$

no qual o índice u significa “incerto” (*uncertain*) e o índice d significa “determinístico”. Uma situação análoga à que descrevemos no algoritmo de decomposição estocástica. Dembo advoga o uso de cenários como uma maneira “extremamente poderosa, conveniente e natural” de descrever incertezas futuras. Portanto, supõe que o problema (B.1) se reduz a um problema determinístico, quando fixamos um cenário s entre vários pertencentes a um conjunto S de cenários possíveis:

$$\begin{array}{lll} v_s \equiv & \min & c_s x \\ & s.t. & A_s x = b_s \\ & & A_d x = b_d \\ & & x \geq 0. \end{array} \tag{B.2}$$

A partir daí, a questão que considera fundamental é “Exatamente como, devem as soluções, obtidas a partir de um certo número de cenários fixos, ser combinadas, de modo a produzir uma única solução razoável ao problema estocástico original ?" Para responder a esta questão, Dembo define o que seria uma *solução razoável* de um sistema linear estocástico:

DEFINIÇÃO: Uma solução $\hat{x}$ para o sistema linear estocástico:

$$\begin{aligned} A_s x &= b_s, \quad s \in S \\ A_d x &= b_d \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{B.3}$$

é $||\cdot||$–viável se satisfaz as equações determinísticas $A_d\hat{x} = b_d$, $\hat{x} \geq 0$ e minimiza $\sum_s p_s \|A_s x - b_s\|$. Propõe, a seguir, um *modelo de coordenação*, a ser resolvido após a solução de cada um dos problemas (B.2). Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_s p_s ||c_s x - v_s||^2 + \sum_s p_s ||A_s x - b_s||^2 \\ s.t. & A_d x = b_d, \\ & x \geq 0. \end{array} \tag{B.4}$$

onde p_s é a probabilidade do cenário s. Ou poderíamos usar a norma L_1: $||z|| = \sum_i |z_i|$, para permanecer no contexto da programação linear:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_s p_s \left[(w_s^- + w_s^+) + e \cdot (y_s^- + y_s^+) \right] \\ s.t. & c_s x + w_s^- - w_s^+ = v_s, \;\; \forall\, s \in S, \\ & A_s x + y_s^- - y_s^+ = b_s, \;\; \forall\, s \in S, \\ & x, w, y \geq 0. \end{array} \tag{B.5}$$

onde $e = (1, 1, ..., 1)$.

Dembo apresenta como vantagem adicional desta abordagem o fato de que o problema de coordenação e os subproblemas estão "desacoplados", ou seja, de que a solução dos subproblemas não depende das estimativas das probabilidades p_s. É, portanto, possível, dado um conjunto fixo de cenários, resolver todos os problemas (B.2) "de uma vez por todas" e refazer a política de ação sempre que as estimativas de p_s forem mudadas.

Apresentamos a seguir um código SCILAB para a implementação das idéias de Dembo com modelo de coordenação (B.5). Tiramos proveito das funções usadas na implementação do algoritmo de decomposição estocástica, de modo que seu uso pressupõe a existência dos diretórios `Probn` usados por aquele código. Além disto, a linha `wdet =` *vetor de índices das equações determinísticas na equação* $T_t x_{t-1} + W_t x_t = h$.

deve ser acrescentada ao arquivo `Probn\paramet.m`. Usamos este código para produzir uma solução "razoável" para o problema estocástico descrito na seção 3.6, com o modelo de coordenação B.5, obtendo o seguinte resultado:

$$\begin{array}{lll} t = 1: & t = 2: & t = 1: \\ \quad u_1 = 2 & \quad u_2 = 1.5 & \quad u_3 = 1 \\ \quad w_1 = 0 & \quad w_2 = 0.5 & \quad w_3 = 1 \\ \quad y_1 = 1 & \quad y_2 = 0 & \quad y_3 = 0 \end{array}$$

Lembrando que, em cada período t:

u_t: unidades produzidas no tempo normal;
w_t: unidades produzidas com horas extras;
y_t: unidades armazenadas para o próximo período.

Em resumo, a estratégia fornecida pelo algoritmo de Dembo consiste em produzir no limite da "capacidade" de tempo normal e de horas extras, sem nunca armazenar nada para o período seguinte. Note–se, entretanto, que a solução para o primeiro período, $u = 2$, $w = 0$, $y = 1$, coincide com a solução do algoritmo de decomposição.

B.2 Estrutura do Problema de Coordenação

O quanto ganhamos ao resolver o problema (B.5), em vez do *grand* problema estocástico (1.3) ? Examinemos a estrutura das equações de (B.5):

Suponhamos que cada equação $T_t x_{t-1} + W_t x_t = h_t$ possua w_s linhas estocásticas e w_d linhas determinísticas. Denotemos por $W_{t,s}$ e $T_{t,s}$ as linhas estocásticas de W e T, e por $W_{t,d}$, $T_{t,d}$ as linhas determinísticas. Assim, a matriz A_d em (B.5) pode ser escrita

$$A_d = \begin{bmatrix} W_1 & & & \\ T_{2,d} & W_{2,d} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & T_{H,d} & W_{H,d} \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

que possui $w_d H$ linhas. Analogamente, para cada $s = (1, k_2, ..., k_H) \in S$, temos

$$A_s = \begin{bmatrix} W_1^1 & & & \\ T_{2,s}^{k_2} & W_{2,s}^{k_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & T_{H,s}^{k_H} & W_{H,s}^{k_H} \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

com $w_s H$ linhas. Temos, portanto, $\#EQ = w_d H + w_s H N_S + N_S$ equações em (B.5), onde N_S é o número de cenários em S. O número de variáveis originais permanece constante em relação ao número de cenários: $w_c H$, onde w_c é o número de colunas de W_t. Contudo, devemos adicionar duas variáveis de penalidade para cada equação estocástica e duas para cada cenário, totalizando $\#VAR = w_c H + 2 w_s H N_S + 2 N_S$. A estrutura geral da matriz de restrições A para o problema (B.5) é exibida a seguir.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_H^1 & 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \\
c_1^1 & c_2^{K_2} & \cdots & c_H^{K_H} & & & 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & & \\
T_{2,s}^{k_2} & W_{2,s}^{k_2} & & & & & & 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
& & T_{H,s}^1 & W_{H,s}^1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & & & \\
T_{2,s}^{k_2} & W_{2,s}^{k_2} & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & -1 & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & \\
& & T_{H,s}^{K_H} & W_{H,s}^{K_H} & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & -1 \\
W_1^1 & & & & & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\
T_{2,d} & W_{2,d} & & & & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & T_{H,d} & W_{H,d} & & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots
\end{array}\right]$$

B.3 Código SCILAB

```
function x=scenopt(problem)

// ************************************************
// Implementa o algoritmo de Otimização de Cenários.
// ************************************************

   timer();

// Carrega rotinas auxiliares:

   getf('rotinas\simplex.m');

   exec(problem+'\tree_str.m');

   exec(problem+'\auxiliar.m');

   getf(problem+'\c.m');

   getf(problem+'\h.m');

   getf(problem+'\T.m');

   getf(problem+'\W.m');

   [wl,wc]=size(W(1,1));

   zero=1E-8;

   Ns=K(H);

   ps=p(n(H,1):n(H,Ns));
```

```
// Principal:

   disp('  resolve subproblemas:');

   [v,A,b,C]=each_scenario();

   disp('  resolve problema de coordenação.');

   x=coordenacao();

   x1=x(1:wc*H);

   xd=zeros(x1);

   xd(find(abs(x1)>zero))=x1(abs(x1)>zero,1); xd=xd';

   tempo=timer()
```

```
function [v,A,b,C]=each_scenario()

A=[]; b=[]; C=[];

eq=[]; for i=weq, eq=[eq i+(0:H-1)*wl]; end

for k=1:Ns,

  Ak=[]; bk=[]; ck=[];

  j=k;

  for t=H:-1:2,

    Ak=[zeros(wl,wc*(t-2)) T(t,j) W(t,j) zeros(wl,wc*(H-t)); Ak];

    bk=[h(t,j); bk];

    ck=[c(t,j); ck];

    j=a(t,j);

  end

  Ak=[W(1,1) zeros(wl,wc*(H-1)); Ak];

  bk=[h(1,1); bk];

  ck=[c(1,1); ck];

  [xk,aux,vk]=simplex(ck,Ak,bk,eq);
```

```
  v(k)=vk;

  x(1:wc*H,k)=xk;

  A=[A; Ak]; b=[b; bk]; C=[C; ck'];

  if k==1 | k/10==round(k/10) then printf('   k=%d',k); end

end
```

```
function x=coordenacao();

wes=[]; wed=[]; wid=[]; wis=[];

for i=1:wl,
  if find(weq==i)<>[] then
   if find(wdet==i)<>[] then wed=[wed i];
                      else wes=[wes i]; end,
  else
   if find(wdet==i)<>[] then wid=[wid i];
                      else wis=[wis i]; end,
  end
end

aes=[]; for i=1:length(wes), aes=[aes wes(i)+(0:H*Ns-1)*wl]; end

ais=[]; for i=1:length(wis), ais=[ais wis(i)+(0:H*Ns-1)*wl]; end

aed=[]; for i=1:length(wed), aed=[aed wed(i)+(0:H-1)*wl]; end

aid=[]; for i=1:length(wid), aid=[aid wid(i)+(0:H-1)*wl]; end

aes=-sort(-aes); ais=-sort(-ais); aed=-sort(-aed); aid=-sort(-aid);

As=[A(aes,:); A(ais,:)];

bs=[b(aes); b(ais)];

Ad=[A(aed,:); A(aid,:)];

bd=[b(aed); b(aid)];
```

```
[ls,lx]=size(As);

[ld,lx]=size(Ad);

les=length(aes);

lis=length(ais);

led=length(aed);

lid=length(aid);

lws=length([wes wis]);

lwes=length(wes);

cc=[zeros(1,lx) ps.*ones(1,Ns) ps.*ones(1,Ns)];

for k=1:Ns, cc=[cc ps(k)*ones(1,H*lws)]; end

for k=1:Ns, cc=[cc ps(k)*ones(1,H*lwes)]; end

cc=[cc zeros(1,lis)];

AC=[C    eye(Ns,Ns)   -eye(Ns,Ns)  zeros(Ns,ls)  zeros(Ns,ls);
    As zeros(ls,Ns)  zeros(ls,Ns)    eye(ls,ls)   -eye(ls,ls);
    Ad zeros(ld,Ns)  zeros(ld,Ns)  zeros(ld,ls)  zeros(ld,ls)];

bc=[v; bs; bd];

eqs=1:Ns+ls+lid;

x=simplex(cc,AC,bc,eqs);
```

Apêndice C

Modelos Vetoriais Auto–Regressivos

Dada a observação de uma série multivariada $\boldsymbol{y}_t = (y_{1t}, \ldots, y_{Mt}),\ \ t = 1 \ldots T$, um modelo VAR de ordem p, ou simplesmente $VAR(p)$, é uma relação do tipo

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Theta}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{C.1}$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é um vetor M–dimensional, cada Ω_i é uma matriz $M \times M$ de coeficientes e ϵ_t é um *ruído branco multi–dimensional*, tal que $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}_t] = 0$ e $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_s] = 0$ para $t \neq s$.

Dada a ordem do modelo, p, nosso objetivo é estimar $\boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\Theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\Theta}_p$ e a matriz de covariâncias dos resíduos, $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t']$, que é suposta constante para todos os tempos t.

Supomos também que além das T observações da série, dispomos de p "pré–amostras", $\boldsymbol{y}_{-p+1}, \ldots, \boldsymbol{y}_0$. Para cada coordenada $m = 1, \ldots, M$, podemos construir um vetor com as T observações e outro com as p pré–amostras de y_m:

$$\boldsymbol{y}^m = \begin{bmatrix} y_{m,1} \\ \vdots \\ y_{m,T} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^m_{-i} = \begin{bmatrix} y_{m,1-i} \\ \vdots \\ y_{m,T-i} \end{bmatrix}. \tag{C.2}$$

Com esta notação, o sistema (C.1) pode ser escrito como

$$\boldsymbol{y}^m = X\boldsymbol{\theta}_m + \boldsymbol{\epsilon}^m, \tag{C.3}$$

onde

$$X = [\,\boldsymbol{e}_T,\, \boldsymbol{y}^1_{-1}, \ldots, \boldsymbol{y}^M_{-1}, \ldots, \boldsymbol{y}^M_{-2}, \ldots, \boldsymbol{y}^M_{-2}, \ldots, \boldsymbol{y}^1_{-p}, \ldots, \boldsymbol{y}^M_{-p}\,] \tag{C.4}$$

e

$$\boldsymbol{\theta}_m = [\,\nu_m,\, \Theta_{m1,1}, \ldots, \Theta_{mM,1}, \ldots, \Theta_{m1,2}, \ldots, \Theta_{mM,2}, \ldots, \Theta_{m1,p}, \ldots, \Theta_{mM,p}\,]' \tag{C.5}$$

é o vetor de coeficientes da m-ésima linha de (C.1); $\boldsymbol{e}_T$ é um vetor coluna com T 1's.

A equação (C.1) pode ser escrita como um *grand* modelo de regressão linear, podendo portanto ser estimado usando técnicas padrão, como, por exemplo, mínimos quadrados. O resultado é sumarizado nas seguintes equações para os estimadores de $\boldsymbol{\theta}_m$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = (X'X)^{-1} X' \boldsymbol{y}^m, \tag{C.6}$$

e das covariâncias dos resíduos:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{(\boldsymbol{y}^i - X\hat{\boldsymbol{\theta}}_i)'(\boldsymbol{y}^j - X\hat{\boldsymbol{\theta}}_j)}{T - Mp - 1} \tag{C.7}$$

A variância do estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$, por sua vez, pode ser estimada por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\theta}_m} = \hat{\sigma}_m^2 T (X'X)^{-1}. \tag{C.8}$$

Estes resultados podem ser utilizados para estimar a ordem do modelo: para observações de grande tamanho, T, a distribuição de $\boldsymbol{\Theta}_p$ é aproximadamente normal com variância $1/T$. Faz sentido, portanto, construir modelos de ordem crescente, até que os elementos de $\boldsymbol{\Theta}_p$ tenham valor absoluto menor que $2/\sqrt{T}$, o que garante 95% de confiança para o valor nulo de $\boldsymbol{\Theta}_p$.

```
function [EstTheta, EstDesvPadrTheta, EstSigma]=AR(Y,p)

[T,M]=size(Y);

T=T-p;

X=[ones(T,1)];

for i=1:p, X=[X Y(p+1-i:T+p-i,:)]; end

Q=(X'*X);

Qinv=inv(Q);

EstTheta=(Qinv*X'*Y(p+1:T+p,:))';

L=Y(p+1:T+p,:)-X*EstTheta';

EstSigma=L'*L/(T-Mp-1);

EstVarTheta=diag(EstSigma)*diag(Qinv)';

EstDesvPadrTheta=sqrt((EstVarTheta));

EstDesvPadrRes=sqrt(diag(EstSigma));

EstCorrRes=inv(diag(EstDesvPadrRes))*EstSigma*inv(diag(EstDesvPadrRes));
```

Apêndice D

Monte Carlo e Redução de Variância

No métode de Monte Carlo em geral estamos interessados em calcular a esperança de uma função $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, em relação a uma certa distribuição de probabilidade F sobre Ω. Ou seja, queremos calcular

$$\zeta = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot dF(\boldsymbol{x}) \tag{D.1}$$

onde a integral é tomada no sentido de Lebesgue-Stieltjes e Ω tem volume finito.

O método de Monte Carlo (MC) busca calcular (D.1) por meio do estimador

$$\overline{\zeta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\boldsymbol{X}_i) \tag{D.2}$$

onde $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ é uma amostra i.i.d. com distribuição F.

Isto leva ao problema de como gerar uma amostra de vetores $\{\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n\}$ segundo a distribuição F. Para distribuições univariadas – discretas ou contínuas – há uma extensa literatura descrevendo métodos de geração de números aleatórios, como, por exemplo, Gamerman [34] e Ross [66]. Para distribuições multivariadas, outras estratégias fazem–se necessárias, como os algoritmos de Gibbs e Metropolis-Hastings, descritos a seguir.

Amostrador de Gibbs

Suponhamos que $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, com $x_i \in \mathbb{R}$, têm distribuição conjunta $F(x_1, \ldots, x_k)$. Suponhamos também que conhecemos as condicionais completas, $F(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = F(x_i | x_{-i})$ e que elas têm uma forma que nos permite gerar amostras univariadas de maneira relativamente simples. Então, a seguinte sequência de vetores $\boldsymbol{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, \ldots, x_k^{(j)})$ definida por

$$\begin{array}{lcl} x_1^{(j)} & \sim & F(x_1 | x_2^{(j-1)}, \ldots, x_k^{(j-1)}) \\ x_2^{(j)} & \sim & F(x_2 | x_1^{(j)}, x_3^{(j-1)}, \ldots, x_k^{(j-1)}) \\ & \vdots & \\ x_k^{(j)} & \sim & F(x_k | x_1^{(j)}, \ldots, x_{k-1}^{(j)}) \end{array}$$

é tal que, se $x^{(j)} \sim F_j$, então

$$F_\infty \equiv \lim_{j \to \infty} F_j = F \tag{D.3}$$

onde o limite é tomado no sentido pontual. Na prática, os $\boldsymbol{x}^{(j)}$ têm distribuição aproximadamente igual a F, depois de uma fase de transição de N iterações. Muito do estudo do amostrador de Gibbs e outros esquemas de amostragem iterativa dedica-se a estimar o número de iterações razoável para a fase de transição e qual o tamanho razoável da amostra a ser gerada para o cálculo dos momentos.

Algoritmo de Metropolis-Hastings

Concentremo-nos inicialmente em espaços $\mathcal{S}$ de estados discretos. Uma cadeia de Markov com núcleo de transição

$$P(x, y) = Prob\{X_n = y | X_{n-1} = x\} \tag{D.4}$$

é dita *irredutível* se cada estado puder ser atingido a partir de um outro qualquer, com probabilidade positiva, ou seja, se para todo par (x, y) existir um inteiro n tal que $P^n(x, y) > 0$. Neste caso, o Teorema de Perron-Frobenius garante a existência de uma probabilidade estacionária para esta cadeia. Ou seja, uma distribuição de probabilidade π em $\mathcal{S}$ tal que

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x) \cdot P(x, y) = \pi(y), \quad \forall y \in \mathcal{S} \tag{D.5}$$

Além disto, se a cadeia for *aperiódica*, ou seja, se

$$mdc\{n \geq 1 | P^n(x, x) > 0\} = 1 \tag{D.6}$$

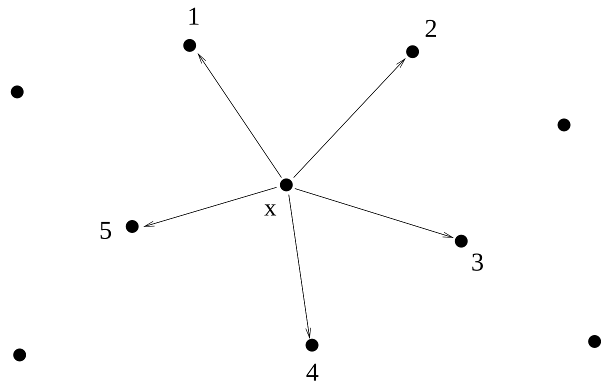


Figura D.1: Representação pictórica do algoritmo de Metropolis-Hastings: um estado na vizinhança de x é escolhido com probabilidade $q(x, y)$. A seguir, a transição para o estado escolhido é aceita, com probabilidade $\alpha(x, y)$, ou rejeitado, com probalidade $1 - \alpha(x, y)$.

onde

$$P^n(a, b) = \sum_z P(a, z)P^{n-1}(z, b) \tag{D.7}$$

é a probabilidade de transição em n etapas, então podemos garantir que a cadeia converge para o estado estacionário, ou seja, $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = \pi(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{S}$.

A equação (D.5) pode ainda ser escrita

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \{\pi(x)P(x, y) - P(y, x)\pi(y)\} = 0, \tag{D.8}$$

o que será satisfeito se tivermos

$$\pi(x)P(x, y) = P(y, x)\pi(y), \tag{D.9}$$

também conhecida como *condição de equilíbrio detalhado*. A equação (D.9) é a base para uma família de algoritmos conhecidos pelo nome genérico de Metropolis-Hastings, devido aos trabalhos pioneiros de Metropolis et al. [52] e Hastings [40]. Seguindo a linha destes trabalhos, o procedimento geral para se construir uma cadeia que tem π como distribuição de equilíbrio é construir um núcleo de transição $P(x, y)$ que satisfaça (D.9) e que segue a seguinte heurística (ver figura D.1): uma vez escolhido o estado de destino, com probabilidade de transição $q(x, y)$, pode-se rejeitá-lo ou aceitá-lo com probabilidade $\alpha(x,y)$, de modo que

$$P(x,y) = q(x,y) \cdot \alpha(x,y). \tag{D.10}$$

Após uma fase de transição, uma sequência gerada com $x^{(j)} \sim P(x^{(j-1)},\cdot)$ terá distribuição próxima à de π.

Em geral, escolhe-se primeiro o núcleo de transição, $q(x,y)$, e depois a probabilidade de aceitação, $\alpha(x,y)$, de modo a satisfazer (D.9). A expressão mais comumente usada é

$$\alpha(x,y) = min\left\{1, \frac{\pi(y)q(y,x)}{\pi(x)q(x,y)}\right\} \tag{D.11}$$

Para entender a lógica desta escolha, suponhamos inicialmente que $q(x,y)$ é uma distribuição uniforme em uma vizinhança de x (o que é quase sempre o caso para espaços de estado discretos; a situação é representada na figura D.1), de modo que $\alpha(x,y) = min\{1, \pi(y)/\pi(x)\}$, $\forall y \in V_{iz}(x)$. Então, a fórmula (D.11) aceita um estado de menor probabilidade que o de x com probabilidade $\pi(y)/\pi(x)$, e aceita *sempre* estados de maior probabilidade que o de x. O que acontece é claro: a cadeia tem uma "preferência" por estados de maior probabilidade. Uma interpretação análoga para o caso geral também é possível (levando em conta a probabilidade das *transições* em vez da probabilidade dos estados) mas basta notar que a inclusão do fator $q(y,x)/q(x,y)$ é necessário para tornar P compatível com a condição (D.9).

Uma variante interessante consiste em tomar para q o amostrador de Gibbs. Ou seja, a cada passo escolhe-se, rotativamente, uma componente do vetor x, gera-se um novo valor para ela segundo o esquema de Gibbs, e a seguir aceita-se ou rejeita-se esta nova posição de acordo com (D.11). Esta estratégia é chamada de *transição por componentes.*

Redução de Variância

O estimador (D.2) é não tendencioso (ou seja, $E_F[\overline{\zeta}_n] = \zeta$) e tem variância

$$var\,\overline{\zeta}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var\,\varphi = \frac{1}{n}\left(\int_\Omega \varphi^2(\boldsymbol{x})\cdot dF(\boldsymbol{x}) - \zeta^2\right), \tag{D.12}$$

o que fornece a conhecida estimativa de $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ para o erro do método MC, desde que

$$\int_\Omega \varphi^2(\boldsymbol{x})\cdot dF(\boldsymbol{x}) < \infty. \tag{D.13}$$

A estratégia geral das técnicas de redução de variância consiste em reescrever (D.1) como

$$\int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot dF(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega^*} \varphi^*(\boldsymbol{x}^*) \cdot dF^*(\boldsymbol{x}^*) \tag{D.14}$$

de tal forma que $var\,\varphi^* < var\,\varphi$. Descreveremos algumas delas aqui, observando que são descrições superficiais e ainda que existem outras técnicas. Uma boa exposição se encontra em [33].

Amostragem por Importância

Suponhamos que F possua densidade de distribuição f, de tal modo que

$$\int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot dF(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{D.15}$$

Na amostragem por importância, a estratégia é trocar $f(\boldsymbol{x})$ por $f^*(\boldsymbol{x})$ da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \varphi(\boldsymbol{x}) \frac{f(\boldsymbol{x})}{f^*(\boldsymbol{x})} \cdot f^*(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \varphi^*(\boldsymbol{x}) \cdot f^*(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{D.16}$$

onde $\varphi^*(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \frac{f(\boldsymbol{x})}{f^*(\boldsymbol{x})}$ e $f^*(\boldsymbol{x}) > 0,\ \forall x \in \Omega$. Agora,

$$var\,\varphi(\boldsymbol{x}) - var\,\varphi^*(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \varphi^2(\boldsymbol{x}) \left[1 - \frac{f(\boldsymbol{x})}{f^*(\boldsymbol{x})}\right] f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{D.17}$$

Se esta integral for positiva, teremos uma redução de variância. Para isto, usa-se a seguinte estratégia na escolha de f^*: nas regiões onde $\varphi^2(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x})$ é pequeno, podemos deixar $f(\boldsymbol{x}) > f^*(\boldsymbol{x})$, mas, nas regiões onde $\varphi^2(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x})$ é "grande", fazemos $f^*(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x})$, tanto quanto possível.

Variação Controlada

Neste método, $F = F^*$ e $\varphi^*(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \alpha(\lambda(\boldsymbol{x}) - \theta)$, onde supomos conhecido $\theta = \int_{\Omega} \lambda(\boldsymbol{x})\, dF(\boldsymbol{x})$, sendo $\lambda(\boldsymbol{x})$ uma função auxiliar, e α é um parâmetro a ser escolhido. Por outro lado:

$$var\,\varphi^* = var\,\varphi + \alpha^2 \cdot var\,\lambda - 2\alpha\sigma_{\varphi,\lambda} \tag{D.18}$$

com $\sigma_{\varphi,\lambda} = cov(\varphi, \lambda)$. Esta expressão é minimizada quando $\alpha = \alpha^* = \sigma_{\varphi,\lambda}/\sigma_\lambda^2$, quando então:

$$var\ \varphi^* = var\ \varphi \cdot \left[1 + \frac{\sigma_{\varphi,\lambda}^2}{\sigma_\varphi^2 \cdot \sigma_\lambda^2} - 2\frac{\sigma_{\varphi,\lambda}^2}{\sigma_\varphi^2 \cdot \sigma_\lambda^2}\right] = var\ \varphi \cdot \left(1 - \rho_{\varphi,\lambda}^2\right) \leq var\ \varphi \tag{D.19}$$

com $\rho_{\varphi,\lambda} = corr(\varphi, \lambda) = \sigma_{\varphi,\lambda}/\sqrt{\sigma_\varphi^2 \sigma_\lambda^2}$. É claro que este ponto de minimização ótima não é facilmente alcançável na prática, pois na maioria das vezes não conhecemos $\sigma_{\varphi,\lambda}$, ou até mesmo σ_λ^2. Entretanto, um pouco de álgebra mostra que

$$\frac{var\ \varphi^*(\alpha)}{var\ \varphi} = 1 - \rho_{\varphi,\lambda}^2 + (\alpha - \alpha^*)^2 \cdot \frac{\sigma_\varphi^2}{\sigma_\lambda^2} \tag{D.20}$$

de modo que $var\ \varphi^*(\alpha) \leq var\ \varphi$ se $\alpha \in [0, 2\alpha^*]$ quando $\sigma_{\varphi,\lambda} \geq 0$, ou $\alpha \in [2\alpha^*, 0]$ quando $\sigma_{\varphi,\lambda} \leq 0$, fornecendo uma boa margem para uma estimativa de α que seja redutora de variância.

Amostragem Estratificada

Este método toma uma partição $\{\Omega_i\}_{i=1\ldots r}$ de Ω e calcula

$$\zeta = \int_\Omega \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot dF(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^r p_i \zeta_i = \sum_{i=1}^r p_i \cdot \int_{\Omega_i} \varphi(\boldsymbol{x}) \cdot dF_{(i)}(\boldsymbol{x}), \tag{D.21}$$

onde $p_i = \int_{\Omega_i} dF(\boldsymbol{x})$ e $dF_{(i)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{p_i} dF(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_i$. Então:

$$\tilde{\zeta}_n = \sum_{i=1}^r \frac{p_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi(\boldsymbol{X}_{ij}) \tag{D.22}$$

é um estimador não tendencioso para ζ, onde, para cada *estrato* Ω_i, geramos n_i vetores $\boldsymbol{X}_{ij}$, $j = 1 \ldots n_i$, i.i.d. com distribuição $F_{(i)}$. Com isto, temos:

$$var\ \tilde{\zeta}_n = \sum_{i=1}^r \frac{p_i^2 \cdot \sigma_i^2}{n_i} \tag{D.23}$$

onde $\sigma_i^2 = var\ \varphi_i = \int_{\Omega_1^2} \varphi^2(\boldsymbol{x})\, dF_{(i)}(\boldsymbol{x}) - \zeta_i^2$. Resta-nos a questão de escolher os n_i, $i = 1 \ldots r$, para cada Ω_i. Mas um pouco de de álgebra mostra que, se $n_i = np_i$, onde $n = n_1 + \cdots + n_r$, então teremos

$$var\,\tilde{\zeta} = var\,\overline{\zeta}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} p_i \cdot (\zeta_i - \zeta)^2 \leq var\,\overline{\zeta}_n \tag{D.24}$$

onde $\overline{\zeta}_n$ é o estimador (D.2). Esta fórmula mostra também que quanto mais dispersas estiverem as esperanças ζ_i, maior será o ganho na redução de variância.

Monte Carlo Condicional

Consideremos o seguinte problema: é dada uma densidade de probabilidade $f(\boldsymbol{z})$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, e queremos calcular a esperança de uma função $\varphi(\boldsymbol{z})$ sobre uma superfície $\mathcal{S} \subset \Omega$, descrita pela equação $\eta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_0$. Ou seja, queremos calcular

$$\zeta = \int_{\mathcal{S}} \varphi(\boldsymbol{z}) \cdot f(\boldsymbol{z}|\eta(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}_0)\, d\boldsymbol{z} \tag{D.25}$$

Suponhamos que é possível descrever Ω por um par de vetores $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\eta(\boldsymbol{z}), \lambda(\boldsymbol{z})) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, com inversa $\boldsymbol{z} = \nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C^1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$. Isto define uma densidade de probabilidade em $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dada por

$$f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \cdot J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{D.26}$$

onde $J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é o jacobiano da transformação $\boldsymbol{z} \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Neste caso, a superfície $\mathcal{S}$ é caracterizada por ter segunda coordenada constante no sistema $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, e a densidade de probabilidade induzida sobre ela por $f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pode ser calculada facilmente:

$$f(\boldsymbol{z}|\eta(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}_0) = f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0) = \frac{f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)}{\int_{\mathcal{X}} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)\, d\boldsymbol{x}} \tag{D.27}$$

$$\Rightarrow \quad f(\boldsymbol{z}|\eta(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}_0) = \frac{f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)) \cdot J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)}{f^*(\boldsymbol{y}_0)} \tag{D.28}$$

onde $f_0^*(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{X}} f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)\, d\boldsymbol{x}$.

Isto resolve o problema formalmente. Temos agora uma integral incondicional, podendo usar qualquer dos métodos precedentes para estimá-la. Contudo, existe um método de redução de variância particularmente adequado à natureza deste tipo de integral, que descreveremos a seguir, sem demonstrações (ver, por exemplo, Fishman [33], ou, diretamente, Granovsky [37]).Usamos um estimador na forma:

$$\tilde{\zeta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(\nu(\lambda(\boldsymbol{Z}_i), \boldsymbol{y}_0)) \cdot w(\boldsymbol{Z}_i) \tag{D.29}$$

onde os $\boldsymbol{Z}_i$ são i.i.d, com distribuição $f(\boldsymbol{z})$ e $w(\boldsymbol{z})$ é uma função definida em Ω, escolhida de tal modo que $\tilde{\zeta}_n$ não seja tendencioso, ou seja, $E[\tilde{\zeta}_n] = \zeta$. Ou ainda:

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \varphi(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)) w(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) f^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dx dy = \zeta \tag{D.30}$$

o que, junto com (D.28), fornece:

$$\int_{\mathcal{Y}} w(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \cdot f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dy = \frac{f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)) \cdot J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)}{f^*(\boldsymbol{y}_0)} \tag{D.31}$$

Procura-se uma solução na forma

$$w(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = \frac{f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)}{f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f^*(\boldsymbol{y}_0)} \cdot \frac{h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\int_{\mathcal{Y}} h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dy} \tag{D.32}$$

onde $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é uma densidade de distribuição em $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Granovsky [37] demonstra que a variância do estimador (D.29) é minimizada com a escolha

$$h^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \cdot J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ , \tag{D.33}$$

de modo que teremos um estimador

$$\tilde{\zeta}^*_n(\boldsymbol{y}_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(\nu(\lambda(\boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{y}_0)) \cdot w^*(\boldsymbol{z}_i) \tag{D.34}$$

com

$$w^*(\boldsymbol{z}) = \frac{f(\boldsymbol{z}) \cdot J(\lambda(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y}_0)}{f^*(\boldsymbol{y}_0) \cdot \int_{\mathcal{Y}} f(\nu(\lambda(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y})) J(\lambda(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{y})\, dy} \tag{D.35}$$

e os $\boldsymbol{Z}_i$'s gerados independentemente a partir de $f(\boldsymbol{z})$.

Outros métodos de redução de variância existem, e é claro que apenas tangenciamos o método de Monte Carlo. Temas importantes não foram tratados aqui, como o cálculo de intervalos de confiaça e a duração do estágio transiente. Gamerman [34] e Fishman [33] são dois bons pontos de partida para o estudo de métodos de Monte Carlo.

Apêndice E

Glossário Atuarial

Ativo dos Planos: Somatório de todos os recursos já acumulados pela entidade, considerando todos os planos por ela oferecidos.

Ativo Líquido dos Planos: Diferença entre o Ativo dos Planos e o Exigível Operacional.

Déficit Técnico: Corresponde à insuficiência de recursos para cobertura dos compromissos do plano.

Exigível Operacional: Somatório dos compromissos de curto prazo já assumidos pela entidade, tais como: benefícios a pagar, despesas administrativas a pagar, impostos e taxas a serem pagos, entre todos.

Passivo Atuarial: Valor presente, calculado atuarialmente, dos benefícios acumulados pelos participantes até a data de avaliação.

Plano de custeio: Financiamento do custo de um plano, fixando as taxas de contribuição para participantes e patrocinadora necessárias ao equilíbrio da entidade.

Reservas Matemáticas: São os montantes calculados em uma determinada data, destinados a pagamentos futuros de benefícios, considerando o regulamento do plano em vigor e o plano de custeio.

Reserva Matemática de Benefícios Concedidos: Corresponde ao valor necessário para pagamentos dos benefícios que já foram concedidos pela entidade.

RESERVA MATEMÁTICA DE BENEFÍCIOS A CONCEDER: Corresponde ao valor necessário para pagamentos dos benefícios que serão concedidos no futuro aos participantes atuais do fundo.

RESERVAS TÉCNICAS: Reservas matemáticas mais o Superávit/Déficit existente no plano.

RESERVA DE CONTINGÊNCIA: Valor constituído em caso de Superávit. Um valor máximo é estabelecido pela legislação.

RESERVA PARA AJUSTE DO PLANO: Será igual à parte do Superávit que exceder o limite permitido para a Reserva de Contingência.

SUPERÁVIT TÉCNICO: Corresponde ao excesso de recursos existente no Ativo dos Planos em relação aos compromissos existentes.

Referências Bibliográficas

[1] Alba, U. N., Asensio, J. V., *Matemática Actuarial*, MAPFRE, 1993.

[2] Benders, J. F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed–Variable Programming Problems", *Numerische Mathematic 4*, 238-252, 1962.

[3] Birge, J. R., "Decomposition and Partitioning Methods for Multi–Stage Stochastic Linear Programming", *Operations Research 33*, 989-1007, 1985.

[4] Birge, J. R., Louveaux, F., *Introduction to Stochastic Programming*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, 1997.

[5] Boender, G. C. E., "A Hybrid Simulation/Optimization Scenario Model for Asset/Liability Management, *European Journal of Operational Research*, vol. 99, 126–135, 1997.

[6] Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. A., Nesbitt, C. J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schaumburg, 1986.

[7] Bunn, D. W., Salo, A. A., "Forecasting With Scenarios", *European Journal of Operational Research*, 291–303, 1993.

[8] Cariño, D., Kent, T., Myers, D., Stacy, C., Sylvanus, M., Turner, A., Watanabe, K., Ziemba, W., "The Russell–Yasuda Kasai Model: An Asset/Liability Model for a Japanese Insurance Company Using Multistage Stochastic Programming", *Interfaces 24*, 29-49, 1994.

[9] Cariño, D. R., Ziemba, W. T., "Formulation of the Russell–Yasuda Kasai Financial Planning Model", *Operations Research*, 46(4), 433-449, 1998.

[10] Cariño, D. R., Myers, D. H., Ziemba, W. T., Concepts, "Technical Issues, and Uses of the Russell–Yasuda Kasai Financial Planning Model", *Operations Research*, 46(4), 450-462, 1998.

[11] Consigli, D., Dempster, M. A. H., "Dynamic Stochastic Programming for Asset–Liability Management", Preprint, 1997.

[12] Dantzig, G. B., "Linear Programming Under Uncertainty", *Management Science 1*, 197–206, 1955.

[13] Dantzig, G. B., Wolfe, P., "The Decomposition Principle for Linear Programs", *Operations Research 8*, 110–111, 1960.

[14] Dantzig, G. B., Madansky, M., "On the solution of Two-Staged Linear Programs under Uncertainty", *Proc. 4th Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability I*, ed. J. Neyman, 165-176, 1961.

[15] Dantzig, G. B., "Planning Under Uncertainty Using Parallel Computing", *Annals of Operations Research 14*, 1–16, 1988.

[16] Dantzig, G. B., Pereira, M. V. F., "Mathematical Decomposition Techniques for Power System Expansion Planning", EPRI Report EL–5299, Eletric Power Research Institute., Palo Alto, CA, 1988.

[17] Dantzig, G. B., Glynn, P. W., Avriel, M., Stone, J., Entriken, R., and Nakayama, M., "Decomposition Techniques for Multi–Area Generation and Transmission Planning Under Uncertainty", EPRI Report 2940–1, Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA, 1989.

[18] Dantzig, G. B., Glynn, P. W., "Parallel Processors for Planning Under Uncertainty", *Annals of Operations Research 22*, 1–21, 1991.

[19] Dantzig, G. B., Ho, J. K., Infanger, G., "Solving Stochastic Linear Programs on a Hypercube Multicomputer", Technical Report SOL 91–10, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, CA, 1991.

[20] Dantzig, G. B., Infanger, G., "Multi–stage Stochastic Linear Programm for Portfolio Optimization", Technical Report, SOL 91–11, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, Stanford CA 94305, September, 1991.

[21] Dantzig, G. B., Infanger, G., "Large–Scale Stochastic Linear Programs: Importance Sampling and Benders Decomposition", Technical Report SOL 91–4, Department of Operations Research, Stanford University, CA, 1991.

[22] Dantzig, G. B., Thapa, M. N., *Linear Programming*, Springer Series in Operations Research, Springer–Verlag, 1997.

[23] Daykin, C. D., Pentikäinen, T., Pesonen, M., *Practical Risk Theory for The Actuaries*, Chapman & Hall, 1994.

[24] Dembo, R. S., "Scenario Immunization", Algorithmics Inc. Research Paper 89.02, (December 1989).

[25] Dembo, R. S., Chiarri, A., Paradinas, Gomez, J., "Management of a Hydrothermal Energy System", *Interfaces 20*, 115–135, 1990.

[26] Dembo, R. S., King, A. J., "Tracking Models for Portfolio Management", Algorithmics Inc. Research Paper 91.01, (February 1991).

[27] Dembo, R. S., "Scenario Optimization", *Annals of Operations Research 30*, 63–80, 1991.

[28] Dempster, M. A. H., "Introduction to Stochastic Programming', *Stochastic Programming*, M.A.H. Dempster, Ed., Academic Press, New York, pp 3–59, 1980.

[29] Dert, C. L., *Asset Liability Management for Pension Funds: A Multistage Chance Constrained Programming Approach*, Ph.D. thesis, Erasmus Universiteit, Rotterdam, 1995.

[30] Dothan, M. U., *Prices in Financial Markets*, Oxford University Press, 1990.

[31] Dunder, C., *Portifolios Ótimos Incluindo Opções*, Tese de Mestrado, IME/USP, 1998.

[32] Entriken,R., Infanger,G., "Decomposition and Importance Sampling for Stochastic Linear Models", *Energy*, Vol. 15, No. 7/8, pp. 645–659, 1990.

[33] Fishman, G. S., *Monte Carlo – Concepts, Algorithms and Applications*, Springer, 1996.

[34] Gamerman, D., *Simulação Estocástica via Cadeias de Markov*, ABE, 1996.

[35] Geoffrion, A. M., "Elements of Large–Scale Mathematical Programming", *Management Science*, Vol. 16, No. 11, 652-691, 1970.

[36] Gondzio, J., "HOPDM (version 2.12) – A Fast LP Solver Based on a Primal–Dual Interior Point Method", *European Journal of Operations Research*, vol. 85, 221-225, 1995.

[37] Granovsky, B. L., "Optimal formulae of the conditional Monte Carlo", SIAM, J. Alg. and Dis. Methods, 1981.

[38] Grinold, R., "Model Building Techniques for the Correction of End Effects in Multistage Convex Programs", *Operations Research*, Vol. 31, No. 3, May–June, 1983.

[39] Grinold, R., "Finite Horizon Approximations of Infinite Horizon Linear Programs", *Mathematical Programming 12*, 1–17, 1997.

[40] Hastings, W. K., "Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications", *Biometrika*, **57**, 97-109, 1970.

[41] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice Hall, 1997.

[42] Infanger, G., *Planning Under Uncertainty – Solving Large–Scale Stochastic Linear Programs*, Boyd & Fraser, 1994.

[43] Judge, G., Hill, R., Griffiths, W., Lütkepohl, H., Lee, T–C, *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, 1988.

[44] Kall, P., Wallace, S. W., *Stochastic Programming*, Wiley & Sons, 1994.

[45] Klaassen, P., *Stochastic Programming Models for Interest–Rate Risk Management*, Ph.D. thesis, MIT, 1994.

[46] Klaassen, P., "Financial Asset–Pricing Theory and Stochastic Programming Models for Asset/Liability Management: A Synthesis", Management Science 44 (1), January, pp. 31-48, 1998.

[47] Johnson, N., Kotz, S., *Continuous Multivariate Distributions*, Wiley & Sons, 1972.

[48] Kouwenberg, R., "Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management", Preprint, 1998.

[49] Kouwenberg, R., "Elements of Dert's Model", Preprint, 1998.

[50] Kusy, M. I., Ziemba, W. I., "A Bank Asset and Liability Management Model", *Operations Research 34*, 356–376, 1986.

[51] Louveaux, F.V., Smeers,Y., "Optimal Investiments for Electricity Generation: A Stochastic Model and a Test–Problem", *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, Springer–Verlag, 33–64, 1988.

[52] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E., "Equations of state Calculations by Fast Computing Machines", *Journal of Chemical Physics*, **21**, 1087-92, 1953.

[53] Oliveira, M. J., Notas de Aula de Mecânica Estatística, IFUSP.

[54] Pereira, C. A., Nakano, F., Stern, J. M., "Actuarial Analysis via Branching Processes", Preprint, 2000.

[55] Pereira, M.V.F, Pinto, L.M.V.G., "Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroeletric System – A Decomposition Approach", *Water Resources Research 21*, 779–792, 1985.

[56] Pereira, M.V.F, Pinto, L.M.V.G., Oliveira, G.C., and Cunha, S.H.F, "A Decomposition Approach to Automated Generation/Transmission Expansion Planning", CEPEL, Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[57] Pereira, M.V.F, Pinto, L.M.V.G., Oliveira, G.C., and Cunha, S.H.F, "A Technique for Solving LP Problems with Stochastic Right–Hand Sides", CEPEL, Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[58] Pereira, M.V.F, Pinto, L.M.V.G., *Stochastic Dual Dynamic Programming*, Technical Note, DEE–PUC/RJ, Catholic University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[59] Pereira, M.V.F, Pinto, L.M.V.G., "Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning", *Mathematical Programming 52*, 359–375, 1991.

[60] Pflug, G. Ch., *Optimization of Stochastic Models: The Interface Between Simulation and Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[61] Pflug, G. Ch., Świętanowski, A., "Optimal Scenario Tree Generation for Multiperiod Financial Optimization", Preprint, 1998.

[62] Pflug, G. Ch., Świętanowski, A., "Asset–Liability Optimization for Pension Fund Management", Preprint.

[63] Pflug, G. Ch., Świętanowski, A., "Dynamic Asset Allocation under Uncertainty for Pension Fund Management", Preprint, 1998.

[64] Pflug, G. Ch., Norkin, V., Ruszczyński, A., "A Branch and Bound Method for Stochastic Global Optimization", *Mathematical Programming 83*, pp. 425–450, 1998.

[65] Rockafellar, R. T., Wets, R. J.–B., "Scenario and Policy Aggregation in Optimization under Uncertainty", *Mathematics of Operations Research 16*, 119–147, 1989.

[66] Ross, S., *Simulation*, Academic Press, 1997.

[67] Silva, L. F., Arpe, P. A., Perry, L. P., Pereira, M. V., "Coordinating the Energy Generation of the Brazillian System", *Interfaces 16*, 16–38, 1986.

[68] Stern, J. M., et al., *Métodos de Otimização em Finanças*, Apostila de Curso de Pós–graduação no IME/USP.

[69] Van Slyke, Wets, R. J.–B., "L–Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, 638-663, 1969.

[70] Walkup, D., Wets, R. J.–B., "Stochastic Programs With Recourse", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 15, 1299-1314, 1967.