INDIPENDENZA STOCASTICA
ED EQUIVALENZA STOCASTICA

In: *«Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze»*, XXII Riunione, Bari, 1933, SIPS, Roma, 1934, Vol. II, pp. 199-202

ESTRATTO
dagli *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*
XXII Riunione - Bari, Ottobre 1933 - XI
VOLUME II

DE FINETTI B. - *Indipendenza stocastica ed equivalenza stocastica.*

Nel calcolo delle probabilità si considera quasi sempre il caso di prove ripetute indipendenti (trattandosi di eventi: il caso di prove indipendenti ugualmente probabili; trattandosi di numeri aleatori (variabili casuali): il caso di prove ripetute con la medesima legge di probabilità); la restrizione che ne deriva al campo abituale di ricerche della teoria delle probabilità è però, quantitativamente e qualitativamente, molto più forte di quanto possa apparire a prima vista. Quantitativamente, nel senso che tale restrizione, oltre i casi ove esplicitamente espressa, è implicita un po' in tutto il calcolo delle probabilità, almeno seguendo quegli Autori che considerano come facenti parte dei principi di tale teoria le osservazioni che conducono a « giustificare » il concetto stesso di probabilità attraverso le frequenze di prove ripetute indipendenti. Qualitativamente, nel senso che essa è molto più restrittiva di quanto lascino pensare sia il nome stesso, sia certe spiegazioni incomplete.

La prima asserzione appartiene alla critica dei principi della teoria delle probabilità, che ho svolta e vado svolgendo altrove, e basti l'avervi accennato. La seconda costituisce invece l'argomento della presente comunicazione; dalla discussione saremo naturalmente portati al concetto di « equivalenza stocastica », concetto in cui quello di « indipendenza stocastica » rientra come caso particolarissimo.

L'indipendenza non significa soltanto la mancanza di un nesso esterno di causa ed effetto tra l'esito di una prova e le condizioni in cui l'altra si svolge (come nelle estrazioni senza reimbussolamento, ove ogni prova modifica la composizione dell'urna); l'indipendenza significa la mancanza di una qualunque influenza dell'esito di una prova sul nostro giudizio circa la probabilità di un'altra. E tale influenza può dipendere anche semplicemente *dal fatto che ogni prova arricchisce l'esperienza in base alla quale fondiamo il nostro giudizio*, e sussistere quindi all'infuori di ogni ripercussione obbiettiva tra prova e prova. L'indipendenza significa dunque che ogni arricchimento d'esperienza in base a nuove prove ci lascia indifferenti nella valutazione delle probabilità successive; sarebbe forse più appropriato, pertanto, dire « indifferenza » (e « prove indifferenti ») anzichè « indipendenza » (e « prove indipendenti »), perchè questo termine richiama piuttosto l'idea di qualcosa di obbiettivo (1).

La differenza di comportamento che alla relazione di indipendenza segue da questa precisazione ha la sua radice nel fatto che dall'indipendenza subordinatamente a ciascuna di certe ipotesi possibili, non consegue l'indipendenza: delle estrazioni da un'urna di composizione ignota sono ad es. indipendenti tra loro subordinatamente a ciascuna ipotesi sulla composizione stessa, eppure non sono indipendenti, perchè l'esito delle successive prove modifica la nostra opinione sulla composizione probabile dell'urna. Si parla spesso in tale caso di « prove indipendenti con probabilità costante ma incognita », espressione totalmente arbitraria ed errata, le prove essendo dipendenti e con probabilità ben nota variabile da prova a prova in seguito all'esito delle prove precedenti; esattamente si potrebbe dire: « prove indipendenti e ugualmente probabili subordinatamente a ciascuna delle ipotesi possibili specificate ». Ma in molti casi nemmeno questa precisazione giova, chè manca la possibilità di una distinzione concreta di ipotesi che sostengano un simile ruolo: così, giocando a testa e croce, siamo in un caso sostanzialmente analogo, perchè il presentarsi troppo frequente di una faccia ci induce a ritenere imperfetta la moneta, ma non sap-

---

(1) Il termine di « indipendenza » — rileviamolo incidentalmente — può inoltre dar luogo ad equivoci specie nel caso di numeri aleatori dove sarebbe spesso necessario parlare di « indipendenza » e « dipendenza » nel senso analitico (esistenza, fra i numeri aleatori $X_1 \ldots X_n$, di una relazione necessaria $f(X_1 \ldots X_n) = 0$; è specialmente per tale inconveniente sostanziale, più che per sfumature di significato, che vorrei proporre il cambiamento di nome, pur riconoscendo la difficoltà, dato l'uso ormai generale.

piamo però distinguere a priori delle circostanze subordinatamente alle quali si abbia l'indipendenza; anche conoscendo esattamente la imperfezione della moneta (sapendo ad esempio che essa, anzichè un disco, è una calotta sferica con determinata freccia f), la nostra opinione circa l'influenza di essa sul presentarsi delle due faccie non è infatti insensibile all'esperienza, e le prove non sono cioè indipendenti nemmeno per chi conosca il grado di imperfezione della moneta.

In tutti questi casi sussiste però sempre, come nel caso dell'indipendenza, la proprietà seguente: che nessuna influenza in nessun problema di probabilità ha l'ordine in cui si svolgono le prove; esprimiamo tale proprietà dicendo che le prove sono *equivalenti*. Nel caso di eventi si ha equivalenza se la probabilità che n prove si verifichino tutte dipende solo da n, ed è uguale cioè per qualsiasi n-pla di prove; nel caso di numeri aleatori, se la legge di probabilità dell'n-pla di numeri aleatori $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ rimane inalterata comunque gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ si scelgano o permutino.

Il concetto di prove equivalenti, che avevo introdotto per il caso di eventi (di cui si è poi occupato, dando una dimostrazione più elementare di buona parte dei risultati, il Khintchine (1)), è stato esteso al caso di numeri aleatori in tre mie note in corso di stampa nei Rend. Lincei. L'estensione è affatto spontanea, come risulta dal fatto che si è potuta dare con le stesse parole una spiegazione del concetto di equivalenza valevole per tutti i casi, e che sussiste la stessa proprietà rilevata nel caso degli eventi: se, subordinatamente a ciascuna di certe ipotesi possibili, dei numeri aleatori sono indipendenti e soggetti alla medesima legge di probabilità, essi sono equivalenti.

Nel caso di prove equivalenti sussistono molte notevoli proprietà analoghe a quelle che si hanno per prove indipendenti, come la legge dei grandi numeri e la legge forte dei grandi numeri, intese però nel senso che la frequenza (nel caso di eventi), risp. la media aritmetica (nel caso di numeri aleatori) sulle prime n prove tendono a oscillare sempre meno al crescere di n, senza peraltro che si possa stabilire a priori un valore cui tendono ad avvicinarsi; nel caso di numeri aleatori, la stessa distribuzione dei valori dati dalle prime n prove tende ad oscillare sempre meno al crescere di n, pur non esistendo, all'infuori del caso d'indipendenza, una distribuzione nota cui essa tenda ad avvicinarsi.

La mancanza di indipendenza fa poi sorgere vari problemi interessanti pel caso generale di prove equivalenti, come appunto lo studio

---

(1) B. DE FINETTI, *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*, « Mem. R. Acc. Lincei », S. 6, Vol. IV, fasc. V; stesso titolo, « Atti Congr. Int. Mat. », Bologna 1928, Vol. VI. — A. KHINTCHINE, *Sur les classes d'événements équivalents*, « Rec. Math. Moscou », T. 39, n. 3, 1932.

della dipendenza di certe probabilità dall'esito delle prove eseguite (problemi così detti delle « probabilità a posteriori » e « probabilità delle cause »). Interessante è poi che il metodo di formazione della più generale legge di probabilità per prove equivalenti costituisce in un certo senso l'inversione di una proprietà precedentemente rilevata: considerata, nel caso degli eventi (risp. dei numeri aleatori), un'infinità di ipotesi subordinatamente a ciascuna delle quali le probabilità si trattino come indipendenti e aventi per probabilità uno qualunque dei valori possibili $0 \leq p \leq 1$ (come legge di probabilità una qualunque delle possibili funzioni di ripartizione $\Phi(\xi)$, $0 = \Phi(-\infty) \leq \Phi(\xi) \leq \leq \Phi(\xi') \leq \Phi(+\infty) = 1$, se $\xi < \xi'$), tale metodo generale consiste nel fissare una qualsiasi distribuzione di probabilità fra tutte o parte delle ipotesi stesse. Si hanno così tutte le possibili leggi di probabilità di prove equivalenti: anche in un caso ove (come veduto nell'es. di testa e croce) tale procedimento non corrisponde a una concreta distinzione di ipotesi possibili, sussiste quindi sempre la possibilità di ricostruire, in base a una tale distinzione, un « modello » di esso, e cioè un caso di prove equivalenti per il quale si hanno sempre le stesse probabilità del caso che interessa.