LE FUNZIONI CARATTERISICHE DI LEGGE ISTANTANEA.

In: « *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* », 1930, vol. XII, fasc. 7-8, pp. 278-282.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 7-8. - Roma, ottobre 1930-VIII.

Matematica. — *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea.* Nota[1] di B. DE FINETTI, presentatata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. — Una distribuzione di probabilità, o, in generale, di *masse* di qualsiasi specie (la cui somma supporremo $= 1$) su un asse ξ, può essere individuata mediante la *funzione caratteristica*[2] $\psi(t) = \int e^{i\xi t} d\Phi(\xi)$ dove $\Phi(\xi)$ (*funzione di ripartizione*) rappresenta la massa a sinistra di ξ, e cioè sulla semiretta $(-\infty, \xi)$, e l'integrale è un integrale di STIELTJES. Data $\psi(t)$, si ricava $\Phi(\xi)$ dalla formula

$$\Phi(\xi) - \Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\xi t}}{it} \psi(t)\, dt\,;$$

perchè $\psi(t)$ sia una funzione caratteristica è necessario e sufficente che tale integrale abbia un senso e Φ risulti non decrescente e tale che

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1930.

(2) Cfr. LÉVY, *Calcul des probabilités*; v. un cenno anche in CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, vol. II, p. 188.

$\Phi(\infty) - \Phi(-\infty) = 1$. È noto poi che un prodotto di funzioni caratteristiche, una combinazione lineare (a coefficenti positivi di somma $= 1$) di funzioni caratteristiche, una funzione verso cui una successione di funzioni caratteristiche converga uniformemente in ogni intervallo limitato, sono ancora funzioni caratteristiche. In particolare la funzione e^{ikt} è la funzione caratteristica nel caso che la massa sia tutta concentrata nel punto $\xi = k$; se $k = 0$ la funzione caratteristica è $\equiv 1$.

Ciò premesso, il problema che ci interessa consiste, formalmente, nell'individuare quelle funzioni $\psi(t)$ tali che $[\psi(t)]^\lambda$ risulti una funzione caratteristica qualunque sia l'esponente (reale e positivo)(1) λ. Se in luogo della funzione caratteristica consideriamo il suo logaritmo, si tratta di cercare le funzioni $\log\psi$ tali che $\lambda \log\psi$ sia sempre un logaritmo di funzione caratteristica, e cioè di caratterizzare le semirette (uscenti dall'origine) dello spazio funzionale costituite interamente di funzioni di detto tipo.

La ricerca interessa per la teoria delle funzioni a incremento aleatorio (2) dove le funzioni del tipo considerato giocano un ruolo essenziale: è mediante esse che si possono rappresentare le *leggi istantanee* di incrementi aleatori. Troveremo che le funzioni cercate sono tutte e sole quelle della forma $\psi(t) = e^{p[\chi(t)-1]}$ con $\chi(t)$ funzione caratteristica e p reale positivo, e quelle che sono limiti di funzioni della forma precedente, nello spazio funzionale in cui la convergenza si intenda convergenza uniforme della funzione in ogni intervallo limitato. (Il modo di convergenza che considereremo, anche se sottinteso, sarà sempre questo). Tale risultato si presta a un'interessante interpretazione relativa al problema accennato di calcolo delle probabilità, e permette di approfondirne lo studio.

2. – Dimostriamo in primo luogo che una funzione della forma $\psi(t) = e^{p[\chi(t)-1]}$, con $\chi(t)$ funzione caratteristica e p reale positivo, è una funzione caratteristica. È infatti

$$e^{p[\chi(t)-1]} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{p}{n}\right) + \frac{p}{n}\chi(t) \right\}^n ;$$

la funzione fra $\{\ \}$ è (se $n > p$) una combinazione lineare, a coefficenti positivi e di somma $= 1$, delle due funzioni caratteristiche 1 e $\chi(t)$, ed è quindi una funzione caratteristica, e lo sono perciò anche le sue potenze. La funzione $e^{p[\chi(t)-1]}$ è il limite di una successione di funzioni caratteristiche, ed è perciò ancora una funzione caratteristica. È ovvio poi che lo è pure $\psi^\lambda(t)$ per $\lambda > 0$; non si ha che sostituire $p\lambda$ a p.

(1) Per $\lambda < 0$ ciò non potrà mai avvenire; basta ricordare che una funzione caratteristica è sempre in modulo ≤ 1 (cfr. LÉVY, op. cit., p. 173).

(2) Cfr. le mie Note *Sulle funzioni a incremento aleatorio; Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori; Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio*; questi «Rendiconti», 1929, 2° sem. V. anche la conferenza su *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo* al Sem. Mat. di Roma, 1930.

Se ψ è limite di una successione di funzioni del tipo precedente, è ancora ovvio che ψ, e anche ψ^λ, con $\lambda > 0$ qualsiasi, sono sempre funzioni caratteristiche.

Condizione sufficente perchè ψ^λ sia funzione caratteristica per ogni $\lambda > 0$ è dunque che ψ appartenga all'insieme J dello spazio funzionale costituito dalle funzioni del tipo $e^{p[\chi - 1]}$ o all'insieme derivato J'.

La condizione è anche necessaria. Se ψ^λ è, per ogni $\lambda > 0$, una funzione caratteristica, lo è anche, per quanto precede, la funzione $e^{p[\psi^\lambda - 1]}$, che è una funzione J; ponendo $p = 1/\lambda$ e facendo tendere λ a zero, la funzione $e^{\frac{1}{\lambda}[\psi^\lambda - 1]}$ tende alla funzione ψ medesima, che appartiene pertanto necessariamente all'insieme J'.

In particolare si ha $J \supset J'$, e quindi l'insieme J è denso in sè. Si osservi poi che un prodotto di funzioni J (rispettivamente J') è ancora una funzione J (rispettivamente J').

3. - Cerchiamo ora le proprietà che caratterizzano, fra le funzioni caratteristiche ψ del tipo (più generale) J', le funzioni caratteristiche del tipo J. Vedremo che la condizione necessaria e sufficente è che, posto

$$\alpha(\lambda) = \lim_{C \to \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \psi^\lambda(t)\, dt$$

risulti $[1 - \alpha(\lambda)]/\lambda$ limitato superiormente (per $\lambda > 0$), ed esista cioè un numero p (necessariamente > 0) tale che $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$. È presumibile (e sarebbe assai importante accertarlo) che la condizione che $\alpha(\lambda)$ sia sempre positivo (per $\lambda > 0$) implichi (nel nostro caso) la proprietà precedente, e la si possa quindi ad essa sostituire, semplificando assai l'enunciato.

Sia $\psi(t)$ una funzione del tipo J, e osserviamo che la si può allora sempre e in un sol modo scrivere sotto la forma $\psi(t) = e^{p[\chi(t) - 1]}$ imponendo la condizione

$$a_1 = \lim_{C \to \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \chi(t)\, dt = 0 .$$

Infatti a_1 rappresenta(1) la massa, della distribuzione rappresentata dalla funzione caratteristica χ, che è concentrata nel punto $\xi = 0$; se è $a_1 > 0$, la funzione caratteristica si può scrivere $\chi = a_1 + (1 - a_1)\overline{\chi}$ ove $\overline{\chi} = \dfrac{\chi - a_1}{1 - a_1}$ è ancora una funzione caratteristica, e per essa $\overline{a}_1 = 0$. E allora a $p[\chi - 1]$ si può sostituire $\overline{p}[\overline{\chi} - 1]$, ove $\overline{p} = p(1 - a_1)$. Supporremo dunque senz'altro $a_1 = 0$.

(1) Cfr. Lévy, op. cit., p. 169.

Calcoliamo allora

$$\alpha(\lambda) = \lim_{C\to\infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \psi^{\lambda}(t)\, dt = \lim_{C\to\infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} e^{\lambda p[\chi(t)-1]}\, dt =$$

$$= e^{-\lambda p} \lim_{C\to\infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} e^{\lambda p \chi(t)}\, dt .$$

Sviluppando

$$e^{\lambda p \chi(t)} = \sum_{0}^{\infty}{}_h \frac{p^h \lambda^h}{h!} \chi^h(t)$$

ed essendo la serie totalmente convergente, si ha

$$\alpha(\lambda) = e^{-\lambda p} \sum_{0}^{\infty}{}_h \frac{p^h a_h}{h!} \lambda^h = e^{-\lambda p} \left\{ 1 + \sum_{2}^{\infty}{}_h \frac{p^h a_h}{h!} \lambda^h \right\}$$

ove si ponga in generale, analogamente ad a_1 già definito,

$$a_h = \lim_{C\to\infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \chi^h(t)\, dt .$$

La funzione caratteristica $\chi^h(t)$ rappresenta la legge di probabilità della somma di h numeri aleatorî indipendenti, ciascuno dei quali segua la legge di probabilità data dalla funzione caratteristica $\chi(t)$; i valori eccezionali (valori cui compete una probabilità non nulla) di una somma di numeri aleatorî sono quelli ottenibili mediante una somma di rispettivi valori eccezionali; i valori eccezionali della legge data da $\chi^h(t)$ sono dunque i valori del tipo $c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_m \xi_m$ ove $c_1 \cdots c_m$ sono interi positivi di somma $= h$, e $\xi_1 \cdots \xi_m$ sono valori eccezionali della legge data da $\chi(t)$. Poichè a_h rappresenta la probabilità del valore $\xi = 0$ nella legge di funzione caratteristica $\chi^h(t)$, è $a_h > 0$ se e soltanto se esistono, fra le combinazioni indicate di valori eccezionali relative a $\chi(t)$, di quelle che diano una somma nulla. In ogni altro caso le a_h sono tutte nulle: in particolare, ad es., se $\chi(t)$ rappresenta una legge continua (senza valori eccezionali), o se tali valori eccezionali hanno tutti lo stesso segno, ecc.; allora è semplicemente $\alpha(\lambda) = e^{-p\lambda}$. In ogni caso è $\alpha(\lambda) \geqq e^{-p\lambda}$ e $\alpha(\lambda) \simeq e^{-p\lambda}$ per $\lambda \to 0$; è anche $\alpha(\lambda) < e^{-p\lambda(1-d)}$ ove d indichi la più grande massa concentrata relativa alla legge $\chi(t)$, perchè si dimostra facilmente che nessun a_h (più in generale: nessuna massa concentrata relativa alla legge $\chi^h(t)$) può superare d. Ciò prova poi che (escluso il caso banale $\psi(t) \equiv 1$), $\alpha(\lambda)$ tende sempre a zero al crescere di λ. Poichè $e^{-p\lambda} > 1 - p\lambda$ $(\lambda > 0)$, la condizione preannunciata $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$ sussiste, ed è quindi necessaria.