SUI CAMPI DI OFELIMITÀ

In: *«Rivista Italiana di Scienze Economiche»*, Bologna, 1935, Anno VII,
Fasc. IV, pp. 523-532

BRUNO DE FINETTI

SUI CAMPI DI OFELIMITÀ

ESTRATTO DALLA *RIVISTA ITALIANA DI SCIENZE ECONOMICHE*

Anno VII - Fascicolo IV - Luglio-Agosto 1935-XIII

NICOLA ZANICHELLI EDITORE - BOLOGNA

1935-XIII

Introduzione. — Sia C un campo costituito da possibili situazioni economiche per un dato individuo; si noti che tale concetto non risulta, con ciò, univocamente determinato, perchè la « situazione economica » si può intendere in termini di *ricchezza* (beni *posseduti* in un dato istante) o di *benessere* (beni *disponibili* per unità di tempo), e, per ciascuno dei due casi fondamentali predetti, si potrebbero distinguere sottocasi di cui non è necessario occuparsi qui. Diremo — qualunque sia la natura di tale campo, che per le considerazioni del seguito sarà del tutto indifferente — che C è noto quale *campo di ofelimità*, quando, dati due punti qualunque P e Q di C, si sappia sempre quale dei due risulti preferibile per l'individuo in questione, oppure si sappia che gli sono ugualmente desiderabili. È ovvio che deve valere la proprietà transitiva, e ne scende quindi, in particolare, che le situazioni « ugualmente desiderabili » costituiscono delle varietà, che si dicono « varietà d'indifferenza » (Edgeworth).

In un campo d'ofelimità si può sempre definire, e anzi in infiniti modi (purchè valga una proprietà analoga al « postulato di continuità » della geometria, ma su ciò non è il caso di insistere) una funzione reale Φ tale che $\Phi(P)$ è maggiore minore od uguale a $\Phi(Q)$ a seconda che P sia preferibile a Q, o Q a P, oppure P e Q siano ugualmente desiderabili. Tali funzioni si dicono, col Pareto, « indici di ofelimità »; se Φ è una tale funzione, sono « indici di ofelimità » tutte e sole le funzioni del tipo $f(\Phi)$ con f funzione crescente. Le varietà d'indifferenza sono le varietà di livello di uno qualunque degli « indici di ofelimità », e inversamente ogni funzione costante sulle varietà d'indifferenza è un « indice di ofelimità » purchè crescente nel senso della « preferenza ».

Un campo C può avere una natura qualsiasi: spesso anzi sarà *discreto*, non potendosi molti beni presentare che in unità indivisibili; ci limiteremo però, per rimanere entro l'ambito del caso cui ci si riferisce abitualmente, ai campi lineari continui, in cui cioè i punti P sono caratterizzati dalle quantità $x_1\ x_2 \ldots x_n$ di n beni, e le x_i possono assumere tutti i valori reali positivi. Gli indici di ofelimità sono allora ordinarie funzioni $\Phi(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ di n variabili, e si possono applicare i concetti usuali dell'analisi, supposto naturalmente che le proprietà di derivabilità di cui si fa uso sussistano effettivamente.

Scopo della ricerca. — Lo scopo che si propone la presente ricerca è molto modesto: semplicemente quello di richiamare l'attenzione sulla necessità di alcuni ritocchi a certi concetti matematici della teoria del « campo d'ofelimità ». Interesse alquanto meno speciale può avere la prima di tali osservazioni in quanto, pur senza volere uscire dai limiti prefissi, non sarà fuori luogo rilevare come essa riveli un sintomo caratteristico di quel malaugurato lasciarsi trascinare dall'apparenza di analogie meccaniche (nel tempo e nel paese di Lord Kelvin, che tutto riteneva doversi spiegare meccanicamente), che, creando agli enunciati delle dottrine classiche la falsa aureola di leggi fisiche, tanto ne ostacola ancora oggi il superamento necessario per la salvezza dell'umanità (1).

Le « linee di preferenza ». — Se si concepisce lo spazio a n dimensioni C come un ordinario spazio metrico, di cui $x_1 \ldots x_n$ sono le coordinate cartesiane, è naturale che delle funzioni Φ si può definire il gradiente, e che, in direzione e verso, tale gradiente è uguale per tutte le funzioni Φ (essendo notoriamente grad $f(\Phi) = \frac{df}{d\Phi}$ grad Φ). Le linee tangenti in ogni punto a tale gradiente appaiono quindi come perfettamente analoghe, nei campi di ofelimità, alle « linee di forza » dei « campi potenziali », e furono appunto introdotte nella teoria economica con la denominazione di « linee di preferenza ». In altre

(1) Per la critica alle concezioni dell'economia classica, si veda una prima esposizione riassuntiva delle idee dell'autore in *Il tragico sofisma*, « Rivista Ital. Scienze Economiche », a. VII, n. 3, maggio-giugno 1935-XIII.

parole, esse sono le *linee ortogonali* delle varietà d'indifferenza. Ma qui bisogna chiedersi: quale significato può avere il concetto di « ortogonalità » nel nostro caso? Nessuno. Esso dipende esclusivamente dalle circostanze arbitrarie insite nella rappresentazione geometrica: basta un cambiamento nelle unità di misura perchè l'ortogonalità cambi il suo significato e le « linee di preferenza » prendano tutt'altro andamento. Precisamente, il grado d'arbitrarietà con cui le linee di preferenza sono definite è di $\infty^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, perchè, riferendosi allo spazio C supposto metrico nel modo precedente, le linee di preferenza relative alla stessa metrica hanno l'equazione $dP \wedge \operatorname{grad} \Phi = 0$, quelle relative a un'altra metrica hanno l'equazione $dP \wedge \alpha \operatorname{grad} \Phi = 0$ con α dilatazione a radici caratteristiche positive (e tali dilatazioni costituiscono appunto una infinità a $\frac{1}{2} n(n+1)$ dimensioni). Per chi abbia maggior familiarità con la terminologia del calcolo differenziale assoluto, si può aggiungere che l'equivoco si basa sulla mancata distinzione di vettori covarianti e controvarianti, distinzione che è essenziale quando la metrica non sia fissata una volta per sempre.

Fortunatamente di tali linee non si è fatto uso quasi mai in effettivi ragionamenti di economia, cosicchè l'errore di concetto non portò, per quanto mi consta, a nessun errore sostanziale. Ma qualche cenno di ragionamento in cui esse compaiono dà un esempio tipico della leggerezza con cui sono state tenute per valide analogie meccaniche illusorie, e lascia intravvedere quanto poco solide debbano essere le basi logiche dell'intero sistema. Si dice ad es. che, in assenza di ostacoli, un « homo oeconomicus » si moverebbe lungo le « linee di preferenza »: così infatti egli salirebbe secondo i « cammini di massima pendenza » la « collina dell'ofelimità ». È implicita qui una così evidente concezione meccanicistica di « forze economiche » analoghe alle forze fisiche, e un così ingenuo ottimismo nel ragionarci sopra come su un « modello » giudicato senz'altro idoneo senza nemmeno badare se non sia privo di senso, che il sospetto di errori di principio che inficino effettivamente le dottrine economiche sorge spontaneo.

I beni « indipendenti ». — Se nel caso precedente la natura degli « indici d'ofelimità » era rispettata (la definizione essendo infatti invariante per la sostituzione di un indice Φ con un altro $f(\Phi)$ qualsiasi), ma era invece dimenticata la natura puramente lineare, e non metrica, del campo C (non avendosi l'invarianza rispetto a trasformazioni non ortogonali di coordinate), abbiamo anche un esempio del caso inverso: è trattata correttamente la natura dello spazio C, ma si trascura, in compenso, di rilevare che la pseudodefinizione non ha valore non essendo invariante rispetto all'uso di un « indice di ofelimità » piuttosto che di un altro.

Si tratta della definizione di « beni indipendenti », rispettivamente « complementari » e « supplementari »; ci occuperemo, come d'uso, del caso di due soli beni, ponendo per semplicità $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Questi tre casi dovrebbero essere contraddistinti allora dall'essere nulla, positiva o negativa la derivata seconda mista $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}$.

Ma, assumendo come indice d'ofelimità $f = f(\Phi)$, la condizione in generale muta, essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{df}{d\Phi} \, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} + \frac{d^2 f}{d\Phi^2} \, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

le due condizioni sono infatti equivalenti nel solo caso in cui $\dfrac{d^2 f}{d\Phi^2} = 0$, ossia nel solo caso banale in cui l'indice d'ofelimità si alteri linearmente: $f = a + b\,\Phi$. Basandoci quindi su un indice di ofelimità anzichè su di un altro, beni indipendenti divengono complementari o supplementari; un esempio semplice si può avere considerando il caso in cui le linee di indifferenza sono le iperboli equilatere: $y = k / x$, e, come indici di ofelimità, si possono prendere tra le infinite possibili le tre funzioni seguenti:

$$\Phi_1 = x\,y \qquad \Phi_2 = \log x + \log y \qquad \Phi_3 = -\frac{1}{x\,y}.$$

Calcoliamo la derivata seconda mista. Si ha

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \, \partial y} = 1 > 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \, \partial y} = -\left(\frac{1}{x\,y}\right)^2 < 0,$$

cosicchè il medesimo campo d'ofelimità può, a seconda dell'indice d'ofelimità che si preferisce scegliere, dar luogo a tutte e tre le interpetrazioni possibili.

La definizione matematica ricordata è quindi priva di significato. Si potrebbe porsi il compito seguente: vedere quale è la condizione perchè per uno almeno degli indici d'ofelimità ad esso relativi un campo d'ofelimità soddisfi la pseudo-condizione di « indipendenza », e, più in generale, poichè tale condizione deve risultare invariante relativamente alla sostituzione di uno ad altro degli indici d'ofelimità, vedere quale è la forma generale di una condizione differenziale relativa a un indice d'ofelimità perchè essa abbia carattere invariantivo rispetto a tutti gli indici d'ofelimità equivalenti.

La condizione di pseudo-indipendenza. — Diremo che si ha pseudo-indipendenza se si ha una funzione (indice d'ofelimità) f tale che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = o$; noto un indice d'ofelimità Φ, la condizione di pseudo-indipendenza significa che l'equazione in f

$$\frac{df}{d\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{d^2 f}{d\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = o$$

ammette soluzione. Essa equivale alla condizione

$$-\frac{\frac{d}{d\Phi}\left(\frac{df}{d\Phi}\right)}{\left(\frac{df}{d\Phi}\right)} = -\frac{d}{d\Phi} \log \frac{df}{d\Phi} = \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}},$$

e quindi alla condizione che il secondo membro sia funzione della sola Φ; tale condizione è infatti visibilmente necessaria, ed è anche sufficiente perchè l'equazione $\frac{d}{d\Phi} \log \frac{df}{d\Phi} = g(\Phi)$ è risolubile con due successive quadrature, dando

$$f = C \int_o^\Phi e^{\int_o^u g(z) dz} du + K.$$

La condizione che il secondo membro, o, meglio, il suo reciproco che indicheremo con

$$G(x, y) = \frac{\Phi'_x \Phi'_y}{\Phi''_{xy}}$$

sia funzione di $\Phi(x, y)$ si esprime coll'annullare lo jacobiano

$$\begin{vmatrix} G'_x & G'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix} = o$$

ossia, sviluppando, e trascurando il fattore comune $(\Phi''_{xy})^{-2}$, con la condizione

$$\Phi''_{xy}(\Phi'^2_y \Phi''_{xx} - \Phi'^2_x \Phi''_{yy}) + \Phi'_x \Phi'_y (\Phi'_x \Phi'''_{yyx} - \Phi'_y \Phi'''_{xxy}) = o.$$

La condizione, così espressa, appare molto complicata e poco significativa. Possiamo però osservare che l'interpretazione geometrica ne è semplice e interessante, e che si può anche trasformarla in modo assai più opportuno.

Il significato geometrico è il seguente. Se a, b, c sono tre linee d'indifferenza, e si prende ad arbitrio un punto A su a, poi il punto B di b con la stessa *ordinata* di A, e il punto C di c con la stessa *ascissa* di A, completando il rettangolo si ottiene un punto D, che avrà l'ascissa di B e l'ordinata di C. Spostando il punto A sulla linea d'indifferenza a, e con esso tutto il rettangolo, facendo scorrere B su b e C su c, il caso della pseudo-indipendenza è caratterizzato dal fatto che anche il punto D *scorre su una linea d'indifferenza*, e ciò quali si fossero le tre linee prescelte a, b, c.

Dimostriamo che la condizione è sufficente. Supponiamo essa sia soddisfatta, ed esista quindi un indice d'ofelimità, e sia la funzione Φ, tale che $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = o$, ossia $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$; indichiamo addirittura con a, b, c le curve di livello su cui $\Phi = a$, $\Phi = b$, $\Phi = c$, e siano x_1, y_1 le coordinate di un generico punto A di a. Avremo per ipotesi $\Phi(A) = \varphi(x_1) + \psi(y_1) = a$, mentre nei punti $B \equiv (x_2, y_1)$, $C \equiv (x_1, y_2)$ avremo per definizione

$$\Phi(B) = \varphi(x_2) + \psi(y_1) = b \;,\; \Phi(C) = \varphi(x_1) + \psi(y_2) = c\,,$$

e nel punto $D \equiv (x_2, y_2)$ sarà

$$\Phi(D) = \varphi(x_2) + \psi(y_2) = [\varphi(x_2) + \psi(y_1)] + [\varphi(x_1) + \psi(y_2)] - \\ - [\varphi(x_1) + \psi(y_1)] = b + c - a\,.$$

Risulta quindi che $\Phi(D)$ dipende solo da a, b, c, e quindi è costante mentre D si sposta, ossia, che la curva su cui si sposta è una linea d'indifferenza.

La condizione è anche necessaria. Supponiamo che la proprietà geometrica sussista, e dimostriamo che si può costruire allora una funzione $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Fissiamo ad arbitrio due linee d'indifferenza a e b, cui attribuiremo due qualunque valori per Φ, ad es. $\Phi = 0$ e $\Phi = 1$. Su a fissiamo ad arbitrio un punto A, e per esso tiriamo la retta verticale e l'orizzontale che diremo « verticale 0 » e « orizzontale 0 »; per i punti in cui queste due rette sono tagliate da b tiriamo un'altra verticale e orizzontale che saranno la « verticale 1 » e « orizzontale 1 »; per il loro punto d'incontro passa una linea d'indifferenza, e ad essa attribuiamo il valore $\Phi = 2$. Per il punto d'incontro della curva 2 con la verticale 0 tiriamo « l'orrizzontale 2 », per il punto d'incontro della curva 2 con l'orizzontale 0 tiriamo la « verticale 2 »; la curva che passa per l'incrocio della verticale 1 e orizzontale 2 (e anche per quello della verticale 2 con l'orizzontale 1) si dirà curva 3; quella che passa per l'incrocio della verticale 2 e orizzontale 2 curva 4, ecc. Si otterrà così proseguendo un reticolo con la proprietà che per l'incrocio della verticale r e dell'orizzontale s passa la curva $r + s$. Ottenuto il reticolo per valori interi si possono col medesimo metodo interpolare dei valori intermedi, e si vengono così a definire due funzioni $r = \varphi(x)$ ed $s = \varphi(y)$ tali che $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ ha come curve di livello le linee d'indifferenza.

Un'altra soluzione, naturalmente equivalente, ma di natura più analitica anzichè geometrico-intuitiva, scenderà dalle considerazioni del prossimo paragrafo.

Il prezzo locale. — L'annunciata trasformazione analitica della condizione precedente si basa sull'introduzione del concetto di « prezzo locale »: così si può chiamare infatti il rapporto $\frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}$, che rappresenta il tasso di scambio per cui, nell'intorno di un dato punto (situazione economica), degli scambi infinitesimi risultano indifferenti. Per maggiore comodità ci baseremo anzi sul logaritmo del prezzo locale così definito, e lo indicheremo con

$$\chi(x, y) = \log \Phi'_x - \log \Phi'_y .$$

Come risulta dal significato stesso, χ rimane invariato cambiando gli « indici d'ofelimità »; lo si verifica del resto immediatamente poichè

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\Phi) = \frac{df}{d\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(\Phi) = \frac{df}{d\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$\log\left(\frac{df}{d\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \log\left(\frac{df}{d\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \log \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \log \frac{\partial \Phi}{\partial y} .$$

Si noti ancora che la χ non dipende neppure dall'unità di misura di x e y se non per una inessenziale costante additiva: se infatti si pone $x = a\xi, y = b\eta$, si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = a \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = b \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$\log \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \log \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \log \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \log \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \log \frac{a}{b} \text{ (*)}.$$

Dimostriamo ora che la condizione di pseudo-indipendenza si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \, \partial y} = 0.$$

Sia infatti $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$; risulta $\chi = \log \varphi'(x) - \log \psi'(y)$, $\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \, \partial y} = 0$, e la condizione è necessaria. Sia inversamente $\dfrac{\partial^2 \chi}{\partial x \, \partial y} = 0$, e quindi $\chi = \alpha(x) + \beta(y)$: la condizione è sufficente perche si può allora costruire $\Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ con

(*) Potrebbe sembrare un'incongruenza che quì si considerino esclusivamente dei cambiamenti di unità di misura per le due coordinate, mentre parlando delle « linee di preferenza » consideravamo come gruppo relativamente a cui la definizione avrebbe dovuto essere invariante quello più largo delle omografie; la ragione sta in ciò, che, a differenza che nel primo, nel secondo problema compaiono nell'enunciato stesso, e sono cioè insiti nella stessa natura della questione, degli *assi privilegiati* (quelli delle merci di cui ci si occupa).

$log\, \varphi'(x) = \alpha(x)$, $log\, \psi'(y) = - \beta(y)$, ossia $\varphi(x) = \int e^{\alpha(x)} d\,x$, $\psi(y) = \int e^{-\beta(y)} d\,y$.

Queste formule danno l'annunciata soluzione analitica diretta del problema della determinazione della soluzione Φ del tipo $\varphi(x) + \varphi(y)$: basta osservare che $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ si ottengono senz'altro da $\alpha(x) = \chi(x, y_0)$, $\beta(y) = \chi(x_0, y) - \chi(x_0, y_0)$, con x_0, y_0, coordinate di un punto scelto ad arbitrio.

La conclusione è che la complessa equazione differenziale che avevamo scritta per disteso equivale alla

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left[log \frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}\right] = 0 \quad \text{od anche} \quad \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} log\, \Phi'_x = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} log\, \Phi'_y\,,$$

come si verifica del resto, eseguendo gli sviluppi, senza alcuna difficoltà.

La condizione differenziale in Φ che si era determinata, è quindi una condizione in χ; più in generale possiamo anzi affermare che *condizione necessaria e sufficente perchè una proprietà qualunque relativa a Φ sia significativa*, ed abbia cioè carattere invariante per tutti i possibili indici di ofelimità $f(\Phi)$ equivalenti a Φ, è che essa non dipenda da Φ che *per il tramite* di χ. Per la già notata invarianza di χ, non occorre dimostrare che la condizione è sufficente. Per dimostrare che è necessaria, si osservi che la χ *definisce completamente* le linee di indifferenza e con ciò *il campo d'ofelimità*, cosicchè qualsiasi proprietà relativa ad esso deve potersi esprimere in termini di χ; sostituendo per χ l'espressione in termini di Φ'_x e Φ'_y si ha una relazione in Φ. Una condizione espressa direttamente in termini di Φ della medesima proprietà deve coincidere, o quanto meno essere trasformabile, nella precedente, ove Φ entra solo per tramite di χ.

Le « isotime ». — Nello studio dei campi d'ofelimità credo si potrebbe trarre notevole vantaggio dal basarsi sistematicamente sul concetto di « prezzo locale », o sul suo logaritmo, χ, il che è equivalente; in particolare meriterebbero d'essere introdotte le linee di livello del « prezzo locale », linee che si potrebbero chiamare (per il significato geometrico, e come nel caso del magnetismo terrestre)

$log\ \varphi'(x) = \alpha(x)$, $log\ \psi'(y) = -\ \beta(y)$, ossia $\varphi(x) = \int e^{\alpha(x)} dx$, $\psi(y) = \int e^{-\beta(y)} dy$.

Queste formule danno l'annunciata soluzione analitica diretta del problema della determinazione della soluzione Φ del tipo $\varphi(x) + \varphi(y)$: basta osservare che $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ si ottengono senz'altro da $\alpha(x) = = \chi(x, y_0)$, $\beta(y) = \chi(x_0, y) - \chi(x_0, y_0)$, con x_0, y_0, coordinate di un punto scelto ad arbitrio.

La conclusione è che la complessa equazione differenziale che avevamo scritta per disteso equivale alla

$$\frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}\left[log\ \frac{\Phi'_x}{\Phi'_y}\right] = 0 \quad \text{od anche} \quad \frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}\ log\ \Phi'_x = \frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}\ log\ \Phi'_y\,,$$

come si verifica del resto, eseguendo gli sviluppi, senza alcuna difficoltà.

La condizione differenziale in Φ che si era determinata, è quindi una condizione in χ; più in generale possiamo anzi affermare che *condizione necessaria e sufficente perchè una proprietà qualunque relativa a Φ sia significativa*, ed abbia cioè carattere invariante per tutti i possibili indici di ofelimità $f(\Phi)$ equivalenti a Φ, è che essa non dipenda da Φ che *per il tramite* di χ. Per la già notata invarianza di χ, non occorre dimostrare che la condizione è sufficente. Per dimostrare che è necessaria, si osservi che la χ *definisce completamente* le linee di indifferenza e con ciò *il campo d'ofelimità*, cosicchè qualsiasi proprietà relativa ad esso deve potersi esprimere in termini di χ; sostituendo per χ l'espressione in termini di Φ'_x e Φ'_y si ha una relazione in Φ. Una condizione espressa direttamente in termini di Φ della medesima proprietà deve coincidere, o quanto meno essere trasformabile, nella precedente, ove Φ entra solo per tramite di χ.

Le « isotime ». — Nello studio dei campi d'ofelimità credo si potrebbe trarre notevole vantaggio dal basarsi sistematicamente sul concetto di « prezzo locale », o sul suo logaritmo, χ, il che è equivalente; in particolare meriterebbero d'essere introdotte le linee di livello del « prezzo locale », linee che si potrebbero chiamare (per il significato geometrico, e come nel caso del magnetismo terrestre) *isogone*, oppure (badando al significato effettivo) *isotime* (dal greco τιμή = prezzo). Delle considerazioni in tale senso non sarebbero del tutto nuove (cfr. ad es. PARETO, *Manuel*, Appendice, n. 44 e sgg.), ma lo studio dell'andamento di tali linee nei diversi casi dovrebbe pure riuscire utile, mentre non mi consta sia stato fatto. La considerazione di tali linee faciliterebbe poi anche le successive deduzioni relative all'equilibrio economico e in particolare la definizione della « curva dei contratti ».

Trieste, 22 luglio 1934-XII.