TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

JONAS RENAN MOREIRA GOMES
BOLSISTA SANTANDER-USP

Sumário

Esse texto é uma reescrita de [1] feito de forma mais detalhada. Foi escrito como uma das notas de apresentação para a Profa. Dra. Lucia R. Junqueira, IME-USP, no primeiro semestre de 2009.

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja T uma contração definida em X. Então:*

- *Existe um único $\overline{x}$ pertencente a X tal que $T(\overline{x}) = \overline{x}$*
- *Qualquer que seja x_0 pertencente a X, a sequência definida por $a_0 = x_0$ e $a_n = T(a_{n-1})$ converge para $\overline{x}$*
- *Qualquer sequência da forma anterior satisfaz*

$$d(a_n, \overline{x}) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c} d(a_0, a_1)$$

Demonstração. Vamos provar primeiramente que, se existe um ponto fixo de T, ele é único. Faremo-lo por absurdo. Suponha que existam x_1 e x_2 que satisfaçam a condição do ponto fixo, então:

$$d(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

Como T é uma contração também temos:

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq c\ d(x_1, x_2)$$

Juntando as duas relações e tendo em mente que a métrica é uma função estritamente positiva para pontos diferentes, obtemos um absurdo ($1 \leq c$).

Provaremos agora que, qualquer que seja x_0 fixado em X, a sequência definida como no enunciado no teorema é uma sequência de Cauchy e que o limite dessa sequência de Cauchy (que existe porque X é completo) satisfaz a condição do ponto fixo. Para isso precisaremos do seguinte lema (que será provado por indução):

$$d(a_n, a_{n+1}) \leq c^{n-1} d(a_0, a_1)$$

Para $n = 0$ é óbvio (porque T é uma contração). Suponha que essa relação valha para $n \leq k$, para $n = k+1$ teremos:

$$d(a_{k+1}, a_{k+2}) = d(T(a_k), T(a_{k+1})) \leq c\ d(a_k, a_{k+1})$$

Usando a hipótese de indução obtemos:

$$d(a_{k+1}, a_{k+2}) \leq cc^{k-1} d(a_0, a_1) \Rightarrow d(a_{k+1}, a_{k+2}) \leq c^k d(a_0, a_1)$$

Assim a relação é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Agora, provaremos que a sequência é uma sequência de Cauchy para qualquer x_0.

$$d(a_n, a_{n+p}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(a_{n+i}, a_{n+i+1})$$

Mas, para cada i temos a seguinte relação $d(a_{n+i}, a_{n+i+1}) \leq c^{n+i-1} d(a_0, a_1)$. Do que obtemos:

$$d(a_n, a_{n+p}) \leq c^{n-1} (\sum_{i=0}^{p-1} c^i) d(a_0, a_1)$$

Mas a soma $\sum_{i=0}^{p-1} c^i$ é menor do que $\frac{1}{1-c}$, que é a soma dos infinitos termos da série geométrica associada as somas parciais indexadas por p. Assim:

$$d(a_n, a_{n+p}) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c} d(a_0, a_1)$$

. Como $\frac{c^{n-1}}{1-c}$ torna-se arbitrariamente pequeno, a sequência é de Cauchy. Assim, como X é completo, existe $\overline{x}$ tal que, para aquele x_0 fixado (mostraremos adiante que $\overline{x}$ não depende de x_0) $\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{x}$.

Mostraremos que $\overline{x}$ é ponto fixo de T:

$$d(a_n, \overline{x}) = d(T(a_{n-1}, T(\overline{x}))) \Rightarrow d(T(a_{n-1}, T(\overline{x})) \leq d(a_{n-1}, \overline{x})$$

Como $\lim_{n\to\infty} d(a_{n-1}, \overline{x}) = 0$, então $T(\overline{x}) = \overline{x}$. Da unicidade do ponto fixo, provamos consequentemente que o ponto de convergência de qualquer sequência da forma do enunciado converge para o mesmo ponto. □

Corolário 1. *Se T é uma função de X em X e se, para algum $m \in \mathbb{N}$ T^m é uma contração (T^m é a m-ésima iterada de T), T tem um único ponto fixo (que coincide com o ponto fixo de T^m) e $\forall x_0 \in X$ a sequência $\{T^n(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ao ponto fixo.*

Demonstração. Fixado $m \in \mathbb{N}$ provaremos que, se T^m é uma contração, então T tem um e só um ponto fixo, que coincide com o ponto fixo de T^m. Para provar a unicidade, mostraremos que:

$$x_0 \text{ ponto fixo de T } \Rightarrow x_0 \text{ ponto fixo de } T^m$$

Se x_0 é ponto fixo de T, então

$$\forall n \in \mathbb{N}\ T^n(x_0) = x_0$$

Para $n = 0$ é óbvio. Supondo que valha para $n = k$, para $n = k + 1$ teremos:

$$T^{k+1}(x_0) = T(T^k(x_0)) \Rightarrow T^{k+1}(x_0) = x_0$$

Em particular, se $n = m$, então todo ponto fixo de T é também ponto fixo de T^m. Assim, pela unicidade do ponto fixo em T^m, T tem no máximo um ponto fixo.

Seja $\overline{x}$ o ponto fixo de T^m, então teremos:

$$T^{m+1}(\overline{x}) = T(T^m(\overline{x})) \Rightarrow T^{m+1}(\overline{x}) = T(\overline{x})$$

Mas

$$T^{m+1}(\overline{x}) = T^m(T(\overline{x})) \Rightarrow T^m(T(\overline{x})) = T(\overline{x})$$

Assim $T(\overline{x})$ é ponto fixo de T^m. Da unicidade do ponto fixo obtemos:

$$T(\overline{x}) = \overline{x}$$

Fixado $x_1 \in X$ se tomarmos a subsequência de $\{T^{nm}(x_1)\}$, pelo Teorema 1, então essa subsequência converge ao ponto fixo. Pra as subsequências da forma $\{T^{nm+r}(x_1)\}$, com $r \in \mathbb{N}$, basta tomar $x_0 = T^r(x_1)$ e aplicar o Teorema 1. Como todas as subsequências de $\{T^n(x_1)\}$ convergem para o ponto fixo, então $\{T^n(x_1)\}$ converge ao ponto fixo. □

Teorema 2. *Seja (M, d) um espaço métrico completo e (X, τ) um espaço topológico. Para $\lambda \in X$, seja $T_\lambda : X \to F(M, M)$ que satisfaz:*

- *$\forall \lambda_0 \in X$, existe uma vizinhança V_0 de λ_0 e uma constante $c_{V_0} < 1$ tais que:*

  $$d(T_\lambda(x_0), T_\lambda(x_1)) \leq c_{V_0} d(x_0, x_1) \ \forall \ (x1, x2) \in M^2 \ \forall \lambda \in V_0$$

- *A função T_λ é contínua em M para todo $\lambda \in X$*

Se para cada λ, x_λ denota o ponto fixo de T_λ, então a função $H : X \to M$ tal que $H(\lambda) = x_\lambda$ é contínua em X.

Demonstração. Seja $\lambda_0 \in X$ e V uma vizinhança de λ_0 e $\lambda \in V$. Então:

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) = d(T_\lambda(x_\lambda), T_{\lambda_0}(x_{\lambda_0}))$$

Mas $d(T_\lambda(x_\lambda), T_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})) \leq d(T_\lambda(x_\lambda), T_\lambda(x_{\lambda_0})) + d(T_\lambda(x_{\lambda_0}), T_\lambda(x_{\lambda_0}))$

Assim, por 1):

$$d(T_\lambda(x_\lambda), T_\lambda(x_{\lambda_0})) \leq c_V d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) + d(T_\lambda(x_{\lambda_0}), T_\lambda(x_{\lambda_0}))$$

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0})(1 - c_V) \leq d(T_\lambda(x_{\lambda_0}), T_\lambda(x_{\lambda_0}))$$

$$d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq \frac{d(T_\lambda(x_{\lambda_0}), T_\lambda(x_{\lambda_0}))}{1 - c_V}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, seja $V_0(\epsilon)$ a vizinhança de λ_0 tal que $\forall \lambda \in V_0(\epsilon)$ $d(T_\lambda(x_{\lambda_0}), T_\lambda(x_{\lambda_0})) < \frac{\epsilon}{1-c_V}$. Se tomarmos $V(\epsilon) = V_0(\epsilon) \cap V$, teremos:

$$\lambda \in V(\epsilon) \Rightarrow \ d(x_\lambda, x_{\lambda_0}) \leq \epsilon$$

Logo, H é contínua. □

Referências

[1] Hönig, Chaim Samuel *Aplicações da Topologia à Análise*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1976