Notas de Análise Real

Jonas Renan Moreira Gomes

6 de novembro de 2008

Sumário

Notação

- Se z é um número complexo ($z \in \mathbb{C}$), denotaremos o conjugado de z por $\overline{z}$
- $F(A, B)$ representará o conjunto de todas as funções com domínio A e contradomínio B

Capítulo 1

Séries de Fourier

1.1 Produto Hermitiano

1.1.1 Definições

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. *Produto Hermitiano* é uma função com domínio $E \times E$ e contradomínio $\mathbb{C}$ que satisfaz:
$\forall \{v, w\} \subset E, \alpha \in \mathbb{C}$

1. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

2. $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u > + \langle v, w \rangle$

3. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \langle v, \overline{\alpha} w \rangle$

4. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle v, v \rangle \geq 0$

Diremos que dois vetores são ortogonais se o seu produto hermitiano for zero. Em símbolos:

$$v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$$

Seja E^0 o conjunto dos vetores de E que são ortogonais a todos os vetores de E:

$$E^0 = \{v \in E | \forall w \in E (\langle v, w \rangle = 0\}$$

. É mais ou menos evidente que E^0 um subespaço vetorial (se $v, w \subset E^0$ então $\forall h \in E, \langle v + w, h \rangle = \overline{\langle h, v + w \rangle} = \overline{\langle h, v \rangle} + \overline{\langle h, v \rangle} = 0$, além disso $0_v \in E^0$, o que pode ser visto com facilidade porque $0_v = 0 \ 0_v$). E^0 será chamado de espaço nulo do produto hermitiano.

Para que $v \in E^0$, basta que v seja ortogonal a ele mesmo, o que provaremos a seguir:

Lema 1. $w \in E^0 \Leftrightarrow w \perp w$

Demonstração. Obviamente $w \in E^0 \Rightarrow w \perp w$ (porque w é ortogonal a *todos* vetores de E). Suponha que $\langle w, w \rangle = 0$, $v \in E$ e $t \in \mathbb{R}$ então:

$$0 \leq \langle v + wt, v + wt \rangle \leq \langle v + wt, v \rangle + \langle v + wt, wt \rangle$$
$$= \overline{\langle v, v + wt \rangle} + \overline{\langle wt, v + wt \rangle} = \overline{\langle v, v \rangle} + \overline{t \langle v, w \rangle} + t\overline{\langle w, v \rangle} + t^2 \overline{\langle w, w \rangle}$$
$$= \langle v, v \rangle + 2tRe(\langle v, w \rangle).$$

Suponha por absurdo que $Re < v, w > \neq 0$. Se tomarmos $t > -\frac{\langle v, v \rangle}{2Re\langle v, w \rangle}$ temos absurdo. Assim $Re\langle v, w \rangle = 0$ e o resultado saí da reaplicação dessa demonstração para vi. □

1.1.2 Norma induzida pelo Produto Hermitiano

O produto hermitiano induz uma norma em E. A norma de um vetor $v \in E$(simbolizada por $\|v\|$) será:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Essa norma satisfaz as seguintes propriedades:

- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v \in E^0$
- $\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$
- $|\langle v, w \rangle \leq \|v\| \|w\|$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

De fato o que chamamos de *norma* aqui não é uma norma como é entendido no sentido usual (porque podemos ter $\|v\| = 0$ e $v \neq 0_v$), porém, se tomarmos o espaço quociente pela relação de equivalência $vRw \Leftrightarrow \exists u \in E^0$ tal que $v = u + w$, teremos uma norma genuína nesse espaço quociente. Isso, entretanto, não será necessário para o propósito de desenvolver a teoria das Séries de Fourier.

1.1.3 Ortogonalização

Dado um vetor $w \notin E^0$ e $v \in E$, podemos, como de forma usual, encontrar a projeção de v em w. Ou seja, encontrar o $c \in \mathbb{C}$ tal que $v - cw \perp w$ (no geral, c é conhecido como o cosseno do ângulo entre u e v, mas mais adiante daremos outro nome para c).

$$0 = \langle v - cw, w \rangle = \langle v, w \rangle - c\langle w, w \rangle \Leftrightarrow c = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

c será chamado de **Coeficiente de Fourier** de v em relação a w. No que se segue, tentaremos criar uma teoria que possibilite aproximar vetores arbitrários de E por famílias ortogonais de vetores de E. Provaremos agora um lema que será utilizado nas demonstrações posteriores

Lema 2. *Seja $\{v_1, ...v_n\}$ um conjunto de vetores ortogonais com norma não nula ($\langle v_i, v_j\rangle = 0 \Leftrightarrow i \neq j$). Se c_i é o coeficiente de Fourier de v em relação a v_i, então*

$$\langle v - \sum_{k=1}^{n} c_k v_k, v_i\rangle = 0, 1 \leq i \leq n$$

Demonstração. Fixado $i \in \{1, ...n\}$,

$$\langle v - \sum_{k=1}^{n} c_k v_k, v_i\rangle = \langle v, v_i\rangle - c_i\langle v_i, v_i\rangle = 0$$

□

Definição 1. Seja $V = \{v_1, ...v_n\}$ um conjunto de vetores com norma não nula

- V é uma família ortogonal se os vetores forem dois a dois ortogonas
- V é ortonormal se V for ortonormal e a norma de cada vetor for 1
- V é total em $F \subset E$ se para todo $v \in F$ valer $(\forall i, \langle v_i, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v \in E^0)$

Teorema 1. *Seja $V = \{v_1, ...v_n\}$ um conjunto de vetores ortogonais e $F \subset E$ tal que $F = \oplus_{k=1}^{n}[v_1]$. Se F é denso em E (i.e.: o fecho de F é E), então V é total.*

Demonstração. Se w está no fecho de F, existe uma seqüência $\{w_n\} \in F$ tal que $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ □

1.1.4 Espaço PC(x)

Seja $p \in \mathbb{R}^+$, definiremos $PC(p)$ como o conjunto de todas as funções com domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\mathbb{C}$ tal que $f(x+p) = f(x)\}$ e $f|_{\{-p,p\}}$ tem um número finito de descontinuidades as quais não são continuidades essenciais (i.e.: os limites laterais existem para todos os pontos). Vemos que, para cada $p \in \mathbb{R}^+$, PC(p) é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (usando a soma e a multiplicação por escalar usuais de uma função), pois:

- Se $\{f, g\} \subset PC(p)$ então $f + g \in PC(p)$
- Se $f \in PC(p)$ $z \in \mathbb{C}$ então $(zf) \in PC(p)$

Em PC(p) estaremos interessados nas seguintes normas:

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [-p, p]\} \text{ e } \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-p}^{p} (f(x))^2 dx}$$

As duas normas estão bem definidas porque se $f \in PC(p)$ então f é Riemann integrável (logo, também o é limitada). Vemos que:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-p}^{p} (f(x))^2 dx} \leq \sqrt{(\|f\|_\infty)^2 2p} = \|f\|_\infty \sqrt{2p}$$

Isso é, a convergência na norma $\| \circ \|_\infty$ implica convergência na norma $\| \circ \|_2$, embora o contrário não seja verdadeiro.

1.2 Série de Fourier para uma função $\in PC(2\pi)$

Definição 2 (Coeficientes de Fourier)**.** Se $f \in PC(2\pi)$, os *coeficientes de Fourier* de f são os números $a_0, a_1...$ e $b_0, b_1, ...$ definidos por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(nt) dt$$

Definição 3. A *Série de Fourier* de uma função f será definida como:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos\, nx + b_n \text{sen}\, nx)$$

Escreveremos

$$f \;\; \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos\, nx + b_n \text{sen}\, nx)$$

Para simbolizar o fato de que o lado direito é a série de Fourier de f.

Exemplo 1. Seja $f \in PC(2\pi)$ tal que $f(x) = -1$ se $-\pi < x < 0$ e $f(x) = 1$ se $0 \leq x \leq \pi$. Os coeficientes a_n e b_n de f são

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} f(t) \cos(nt) dt + \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_{\pi}^{0} f(-t) \cos(n(-t)) dt + \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \text{sen } (nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \text{sen } (nt) dt = \frac{2}{\pi} \left| \frac{-\cos\, nx}{n} \right|_{0}^{\pi}$$

Se n for ímpar:

$$b_n = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$$

Se n for par:

$$b_n = 0$$

Assim, a série de Fourier de f é:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } (2n-1)x}{2n-1}$$

O teste da integral nos revela que essa série não converge se $x = 0$ ou $|x| = \pi$.

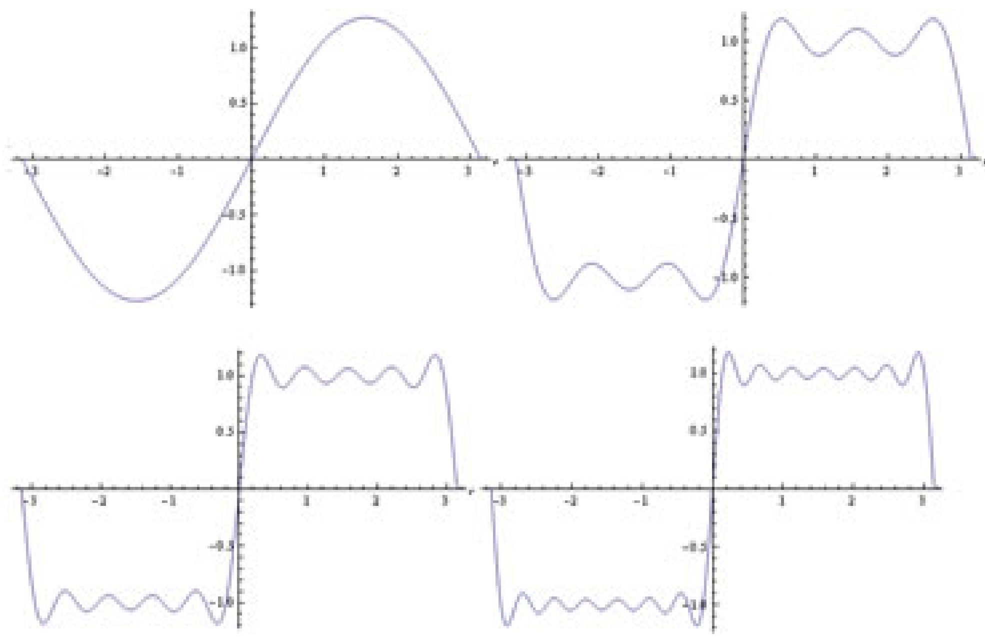

Figura 1.1: Somas Parciais da Série de Fourier para a função do Exemplo 1

Exemplo 2. Seja $f \in PC(2\pi)$ tal que $f(x) = |x|$, se $-\pi < x \leq \pi$. Integração elementar revela que a série de Fourier de f é:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\,(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)$$

O teste M de Weierstrass nos garante que essa série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

1.3 Convergência da série de Fourier

1.3.1 Polinômio Trigonométrico

Definição 4. Chamaremos de *Polinômio Trigonométrico de grau n* qualquer função $T_n(x)$ da forma abaixo:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos\, kx + \beta_k \mathrm{sen}\, kx)$$

Lema 3. *Se $f \in PC(2\pi)$ e T_n é um polinômio trigonométrico de grau n, então*

$$\|f - T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$$

$$+\pi\left(\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha_k)^2+(b_k-\beta_k)^2\right)$$

onde a_k e b_k denotam os coeficientes de Fourier de f.

Demonstração.

$$\|f-T_n\|_2^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2dx=$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left((f(x))^2-2(T_n(x)f(x))+(T_n(x))^2\right)dx=\|f\|_2^2-2\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)f(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}(T_n(x))^2dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(T_n(x))^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos\,kx+\beta_k\text{sen}\,kx)\right)^2dx$$

$$=\pi\frac{\alpha_0}{2}+2\alpha_0\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos\,(kx)dx+\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}\,(kx)dx\right)+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos\,kx+\beta_k\text{sen}\,kx)\right)^2dx$$

$$=\pi\frac{\alpha_0}{2}+\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\,kx)^2+\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}(\text{sen}\,kx)^2\right)=\pi\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)f(x)dx=\frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\,(kx)dx+\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\text{sen}\,(kx)dx\right)$$

$$=\pi\left(\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)\right)$$

Assim

$$\|f-T_n\|_2^2=\|f\|_2^2-2\left(\pi\left(\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)\right)\right)$$

$$+\pi\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$$

Somando e subtraindo $\pi\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right)$ obtemos a fórmula desejada. □

O lema provado nos mostra que, fixados f e n, o polinômio trigonométrico de grau n que mais se aproxima de f na norma $\|\circ\|_2$ é aquele onde os n α_k e β_k são escolhidos como os coeficientes de Fourier de f. Chamaremos esse polinômio de $S_n(f)$.

Inequação 1. *Desigualdade de Bessel Se $f\in PC(2\pi)$, então*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right)<\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

Demonstração. Do lema 3, segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \right) < \frac{1}{\pi} \|f\|_2^2$$

Mas a série a esquerda é positiva, logo, pelo teorema da convergência monótona, o resultado está provado. □

Lema 4. *Lema de Lebesgue-Riemann Se $f \in PC(2\pi)$ então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen\ (n + \frac{1}{2})tdt = 0$$

Demonstração.

$$\text{sen } (n + \frac{1}{2})t = \text{sen } nt\text{cos } \frac{t}{2} + \text{sen } \frac{t}{2}\text{cos } nt$$

Assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{sen } nt\text{cos } \frac{t}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{sen } \frac{t}{2}\text{cos } nt$$

Mas $f(t)\text{sen } \frac{t}{2}$ e $f(t)\text{cos } \frac{t}{2}$, são funções que, com a apropriada extensão, pertencem a $PC(2\pi)$. Assim, as integrais simbolizam os coeficientes de Fourier dessas funções e, pela Desigualdade de Bessel (1), vemos que os coeficientes de uma série de Fourier tendem a 0, quando n tende a infinito. Assim cada integral tende a 0 e o resultado está obtido. □

1.3.2 Somas Parciais da Série de Fourier

Para conseguirmos tratar os polinômios trigonométricos com mais facilidade, introduziremos o conceito de Núcleo de Dirichlet

Definição 5. Núcleo de Dirichlet

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \text{cos } kt$$

Lema 5.

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{sen\ (t+\frac{1}{2})}{2sen\ \frac{t}{2}}, & se\ 0 < |t| < \pi \\ n + \frac{1}{2}, & se\ t = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Se $z = e^{ikt}$ e $t \neq 0$, então $D_n(t) = \frac{1}{2}(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt})$, mas

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \frac{e^{it(2n+1)} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{it(n+1/2)} - e^{-it(n+1/2)}}{e^{it(1/2)} - e^{-it(1/2)}}$$

$$= \frac{\text{sen}(n+1/2)t}{\text{sen }(t/2)}$$

Assim $D_n(t) = \frac{\text{sen}(n+1/2)t}{2\text{sen }(t/2)}$

Se $t = 0$, então $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{2} + n$ □

Lema 6. *Somas Parciais da Série de Fourier Se $f \in PC(2\pi)$, então as somas parciais $(S_n(f))$ de sua série de Fourier são dadas por*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$$

Demonstração.

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{sen}(kt)dt\text{sen } kx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt)\cos kx + \text{sen}(kt)\text{sen } kx)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t))dt$$

Se t= x+s, usando o fato de que a função é periódica:

$$S_n(f)(x+s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ks)dt$$

Assim

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$$

□

1.3.3 Teoremas de Convergência

Teorema 2. *Teorema da Convergência por Partes Seja $f \in PC(2\pi)$. Suponha que f tem derivada a direita e a esquerda no ponto c. Então, a série de Fourier de f converge para $\frac{1}{2}(\lim_{x\to c^+} f(c) + \lim_{x\to c^-} f(c))$ no ponto c.*

Demonstração. Da idêntidade do Núcleo de Dirichlet

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\text{sen}(n+1/2)t}{2\text{sen }(t/2)}$$

Então

$$\int_0^{\pi}\left(\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{2\pi} + \frac{f(x)}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt = \int_0^{\pi}\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{\pi}\frac{\text{sen}(n+1/2)t}{2\text{sen }(t/2)}$$

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{2}=\int_0^{\pi}\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(n+1/2)t}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}$$

Da mesma forma

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)}{2}=\int_{-\pi}^{0}\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(n+1/2)t}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}$$

Assim,

$$S_n(f)(c)-\frac{1}{2}(\lim_{x\to c^+}f(x)+\lim_{x\to c^-}f(x))=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-\lim_{x\to c^+}f(x)}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}\ \mathrm{sen}(n+1/2)t\right)dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{f(x+t)-\lim_{x\to c^-}f(x)}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}\ \mathrm{sen}(n+1/2)t\right)dt$$

Mas

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-\lim_{x\to c^+}f(x)}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-\lim_{x\to c^+}f(x)}{t}\frac{t}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}$$

Ambos os limites existem separadamente e, logo

$$=\lim_{x\to c^+}f'(c)$$

Assim podemos fazer uma extensão contínua no 0 de $g(x)=\frac{f(x+t)-\lim_{x\to c^+}f(x)}{2\mathrm{sen}\ (t/2)}$, de forma que ela seja contínua por partes (com $g(0)=\lim_{x\to c^+}f'(c)$ e $g(x)=0$, se $-\pi<x<0$).

Um argumento similar ao utilizado no lema 4 nos mostra que as integrais tendem a 0 quando $n\to\infty$. Logo

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f)(c)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to c^+}f(x)+\lim_{x\to c^-}f(x))$$

□

Referências Bibliográficas

[1] LANG, S.: *Undergraduate Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (2005).

[2] RUDIN, W: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; (1971).