

ÁLGEBRAS DE BOOLE

JONAS GOMES

SUMÁRIO

1. Definição	1
1.1. Definição por Reticulados	1
1.2. Definição Algébrica	3
2. Filtros e Ideais	3
2.1. Definição	3
2.2. Bases de um Filtro	4
3. Ultrafiltros	5
3.1. Definição	5
Referências	5

Esse texto é uma reescrita de [1] feito de forma mais detalhada. Foi escrito como uma das notas de apresentação para a Profa. Dra. Lucia R. Junqueira, IME-USP, no primeiro semestre de 2009.

1. DEFINIÇÃO

1.1. Definição por Reticulados.

Definição 1. Dizemos que um conjunto A é parcialmente ordenado por $\leq$ se $\forall x, y, z \in A$

$$x \leq x \quad (1)$$

$$\text{Se } x \leq y \text{ e } y \leq x \text{ então } x = y \quad (2)$$

$$\text{Se } x \leq y \text{ e se } y \leq z \text{ então } x \leq z \quad (3)$$

Além disso, A terá relação de ordem total se:

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x \quad (4)$$

Definição 2. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. O supremo (respect.: ínfimo) de um subconjunto B é definido por

$$x \in B \text{ tal que } \forall y \in B \ y \leq x \text{ (respect.: } x \leq y)$$

e se for o menor (respect.: maior) elemento com essa propriedade.

Notação: Denotaremos o supremo (respect.: ínfimo) de B por $\sup(B)$ (respect.: $\inf(B)$) ou $\bigvee_{i \in I} B$ (respect.: $\bigwedge_{i \in I} B$) Se $B = \{x, y\}$, $\sup(B) = x \vee y$ (respect.: $\inf(B) = x \wedge y$).

Definição 3. Um reticulado é um conjunto A parcialmente ordenado tal que

$$\forall x, y \in A \exists (x \wedge y) \text{ e } \exists (x \vee y)$$

Exemplo 1. Se A é um conjunto completamente ordenado, então A é um reticulado.

Proposição 1. Se A é um reticulado e $B \cup C = A$, então $\sup(A) = \sup(B) \vee \sup(C)$

Demonstração. Se x é $\sup$ de A , então $\forall y \in A, y \leq x$. Como $y \in A \Rightarrow y \in B \cup C$, então $\forall y \in B$ e $\forall y \in C, y \leq x$. Dessa forma, $\sup B \leq x$ e $\sup C \leq x$, assim $\sup B \vee \sup C \leq x$. Assim x é um majorante de $\{\sup B, \sup C\}$. Para mostrar que ele é o menor majorante, suponha que exista $m \in A$ tal que $\sup B \leq m$ e $\sup C \leq m$. Assim, $\forall y \in B, \forall z \in C, y \leq m$ e $z \leq m$. Assim, $\forall a \in A, a \leq m$, do que segue que m é um majorante de A e assim, $x \leq m$.

Se $x = \sup B \vee \sup C$, então $\sup B \leq x$ e $\sup C \leq x$, donde $\sup A \leq x$. Para mostrar que x é o menor elemento com essa propriedade, considere $m \in A$ tal que $\sup B \leq m$ e $\sup C \leq m$. Assim m é majorante de $\{\sup B, \sup C\}$, do que segue que $x \leq m$. $\square$

Proposição 2. Seja A um reticulado. Se $B \subset A$ é finito, então existe $\sup B$.

Demonstração. Faremos por indução no número de elementos de B . Se $n = 1$, $B = \{x\}$ e $\sup B = x$. Supondo que caso $n = k$ tenha sido provado, para $n = k + 1$ temos que B pode ser escrito como $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ ou $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cup \{x_{k+1}\}$. Pela proposição anterior, sabemos que $\sup B = \sup\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \vee \sup\{x_{k+1}\}$. Como A é um reticulado, o resultado segue. $\square$

Definição 4. Um reticulado R é dito complementado se existe $\sup R = 1$, $\inf R = 0$ e

$$\forall x \in R, \exists y \text{ tal que } x \wedge y = 0, x \vee y = 1$$

Para garantir que o complemento de um elemento seja único exigimos a propriedade de distributividade do reticulado:

Definição 5. Dizemos que um reticulado é distributivo se

$$\forall x, y, z \in R, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ e } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Proposição 3. Em um reticulado distributivo cada elemento tem um e somente um complemento.

Demonstração. Suponha que $x \in R$ tenha dois complementos, isso é, $\exists z, y \in R$ tal que $x \wedge y = 0 = x \wedge z$ e $x \vee y = 1 = x \vee z$

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= 1 \wedge (y \vee z) = y \vee z \end{aligned}$$

Assim $y = y \vee z$ da mesma forma $z = y \vee z$ e assim $y = z$ $\square$

Nota 1. Representaremos o oposto de x por x^*

1.2. Definição Algébrica.

Definição 6. Uma álgebra de Boole é uma estrutura $\mathcal{B}$ da forma:

$$\mathcal{B} = \{\wedge, \vee, *, 1, 0\}$$

que satisfaz:

$$x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x \quad (5)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad (6)$$

$$x \wedge (y \vee x) = x, x \vee (x \wedge y) = x \quad (7)$$

$$x \wedge x^* = 1, x \vee x^* = 0 \quad (8)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (9)$$

Definição 7. Em uma Álgebra de Boole $\mathcal{B}$, diremos que $x \leq y$ se $x \wedge y = x$

1.2.1. Igualdade das definições.

Proposição 4. $\mathcal{B}$ é uma Álgebra de Boole sse $\langle \mathcal{B}, \leq \rangle$ é um reticulado complementado e distributivo

Demonstração. Precisamos primeiro mostrar que $\leq$ define uma relação de ordem em $\mathcal{B}$. É imediato mostrar 1 e 2. Se $x, y, z \in \mathcal{B}$ são tais que $x \leq y$ e $y \leq z$ então, $x \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = y \wedge z = z$. Assim verifica-se 3. Como $\wedge$ e $\vee$ são funções com contradomínio em $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é reticulado. 8 garante-nos de que existe o complemento e 7 garante-nos de que ele é único. Assim toda Álgebra de Boole $\mathcal{B}$ é um reticulado complementado e distributivo.

Como $\langle \mathcal{B}, \leq \rangle$ satisfaz todas propriedades de uma Álgebra de Boole, $\mathcal{B}$ é uma Álgebra de Boole. $\square$

2. FILTROS E IDEAIS

2.1. Definição.

Definição 8. Um Filtro (respect. Ideal) C em um reticulado R é um conjunto não-vazio que satisfaz:

$$\forall x, y \in C \quad x \wedge y \in C \quad (\text{respect: } x \vee y \in C) \quad (10)$$

$$\forall x \in C, y \in R \quad x \leq y \Rightarrow y \in C \quad (\text{respect: } y \leq x \Rightarrow y \in C) \quad (11)$$

Exemplo 2. O próprio reticulado é ao mesmo tempo um ideal e um filtro

Exemplo 3. Fixado $y \in R$, o conjunto $\{x \in R \text{ tal que } x \leq y\}$ é um ideal, chamado de ideal principal gerado por y .

Proposição 5. *Em todo reticulado finito, todo filtro e todo ideal é gerado por algum elemento.*

Demonstração. Seja C um filtro (respect: ideal) e $x = \bigwedge C$ (respect: $x = \bigvee C$). Vamos mostrar que C é gerado por x (Note que por estar em um reticulado e C ser finito, x existe. Note também que $x \in C$). Seja $C' = \{y \in R \text{ tal que } x \leq y\}$ (respect. $x \geq y$), vamos mostrar que $C = C'$. Se $z \in C$, então $z \geq x$ (respect. $z \leq x$), assim $C \subset C'$. Se $z \in C'$, então $z \geq x$ e, logo $C' \subset C$. $\square$

Nota 2. *De agora em diante, quando nos referirmos a filtro e ideal queremos dizer filtros e ideais próprios (diferentes do reticulado)*

Os subconjuntos de uma álgebra de Boole que podem ser estendidos a filtros são aqueles que gozam da seguinte propriedade:

Definição 9. *Um conjunto F de uma álgebra de Boole tem a propriedade da intersecção finita ('fip') se o ínfimo de qualquer subconjunto finito de F é diferente de 0*

Exemplo 4. *Qualquer filtro (próprio) tem a fip*

Proposição 6. *Se B é uma álgebra de Boole e $A \subset B$ é um conjunto com a fip, $\forall x \in B$, ou $A \cup \{x\}$ ou $A \cup \{x^*\}$ tem a fip.*

Demonstração. Seja $A \subset B$ conjunto com a fip, $x \in B$ e $F \subset A$ um subconjunto finito contido em A . Se $F \cup x = 0$, então $\bigwedge(F \cup x) = (\bigwedge F) \wedge x = 0$. Ou seja, $F = x^*$, logo $A \cup \{x^*\} = A$ e $A \cup \{x^*\}$ tem a fip. Da mesma forma, se $F \cup \{x^*\} = 0$, então $A \cup \{x^*\}$. $\square$

2.2. Bases de um Filtro. Se B é uma Álgebra de Boole e $A \subset B$, denotaremos por A^0 o conjunto dos elementos de B maiores que algum elemento de A :

$$A^0 = \{x \in B \text{ tal que } x \geq a, \text{ para alguma } a \in A\}$$

Denotaremos por A^c o conjunto de todos os ínfimos de subconjuntos finitos de A :

$$A^c = \{x \in B \text{ tal que } \exists F \subset A \text{ finito } ex = \bigwedge F\}$$

Definição 10. *Se F for um filtro, A será dito uma base de F se $A^0 = F$*

Definição 11. *Se F for um filtro, A será dito uma sub-base de F se $(A^c)^0 = F$*

Lema 1. *Se B é uma Álgebra de Boole e $A \subset B$, então $(A^c)^0$ é um filtro de B (não necessariamente próprio). Qualquer filtro contendo A contém $(A^c)^0$. $(A^c)^0$ é um filtro (próprio) sse A tem a fip.*

Demonstração. Se $x, y \in (A^c)^0$ então $\exists X, Y \subset A$ finitos tal que $x \geq \bigwedge(X)$ e $y \geq \bigwedge(Y)$. É claro que $A \cup B$ é finito e $\bigwedge(A \cup B) = (\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B)$. Mas $(\bigwedge A) \wedge (\bigwedge B) \leq x \wedge y$ e, logo, $x \wedge y \in (A^c)^0$. Se $x \in (A^c)^0$ e $y \in B$,

então, se $y \geq x$, $\wedge X \leq x \leq y$ e, assim, $y \in (A^c)^0$. Se $F \supset A$ é um filtro, então, se $x \in (A^c)^0$, existe X finito tal que $\wedge X \leq x$. Como F é filtro, $\wedge X \in F$. Assim, $x \in F$ e $(A^c)^0 \subset F$. Se A não tem a fip, existe $X \subset A$ finito tal que $\wedge X = 0$. Assim, $0 \in (A^c)^0$ (já que $0 \geq \wedge X$) e assim o filtro não é próprio. Se o filtro não for próprio, então $0 \in (A^c)^0$ e existe $X \subset A$ finito tal que $0 \geq \wedge X$, ou seja, $\wedge X = 0$. Assim A não tem a fip. $\square$

3. ULTRAFILTROS

3.1. Definição. Seja B uma Álgebra de Boole e F um filtro em B . Se não existir um filtro F' diferente de F tal que $F \subset F'$, diremos que F é um *ultra-filtro* (ultra-filtro é um filtro maximal na relação de ordem definida pela inclusão em 2^B).

REFERÊNCIAS

- [1] Bell, J.L. Slomson, A. B. *Models and Ultraproducts: An Introduction*, Dover Publications, Inc. Mineola, Nova York, USA., 3th edition, 2006