TEOREMA DE BAIRE

JONAS RENAN MOREIRA GOMES
BOLSISTA SANTANDER-USP

Sumário

1.	Conceitos Preliminares	1
2.	Definição de Espaço de Baire	2
3.	Exemplos de Aplicações do Teorema de Baire	5
Referências		8

Esse texto é uma reescrita de [1] feito de forma mais detalhada. Foi escrito como uma das notas de apresentação para a Profa. Dra. Lucia R. Junqueira, IME-USP, no primeiro semestre de 2009.

1. Conceitos Preliminares

Baseado na exposição de 13/03/09

Proposição 1. *Seja (X, τ) um espaço topológico. $F \subset X$ tem interior vazio se, e somente se, $X \setminus F$ é denso em X.*

Demonstração. F tem interior vazio $\Leftrightarrow$ $\forall O \in \tau\ F \cap O = \emptyset \Leftrightarrow$ $\forall O \in \tau\ O \subset X \setminus F \Leftrightarrow$ $X \setminus F$ é denso em X □

Definição 1 (Conjunto G_δ e Conjunto F_σ)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que $A \subset X$ é um conjunto G_δ se $A = \bigcap_n \{X \setminus A : A \in \tau\}$ (i.e., se A for formado pela intersecção enumerável de conjuntos abertos). De forma análoga, diremos que A é um conjunto F_σ se for reunião de conjuntos fechados*

Definição 2 (Conjunto Magro)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que $A \subset X$ é um conjunto magro em X se A está contido na reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio. Simbolicamente:*

$$A \subset \bigcup_n \{X \setminus B : B \in \tau \text{ e } int(X \setminus B) = \emptyset\}$$

Proposição 2. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos magros. Então $\bigcup_n M_n$ é um conjunto magro.*

Demonstração. A idéia da demonstração é, como o $\bigcup_n M_n$ é a união enumerável de conjuntos magros, está contido na união enumerável de uniões enumeráveis de fechados sem interior e logo, como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, está contido na união enumerável de fechados sem interior e assim, é magro.

Se $A = \bigcup_n M_n$, como cada $M_n \subset \bigcup_m \{X \setminus B : B \in \tau \text{ e } \mathrm{int}(X \setminus B) = \emptyset\}$ então

$$A \subset \bigcup_{(n,m)} \{X \setminus B : B \in \tau \text{ e } \mathrm{int}(X \setminus B) = \emptyset\}$$

Seja $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a inversa de uma enumeração de $\mathbb{Q}$

$$A \subset \bigcup_{f^{-1}(n,m)} \{X \setminus B : B \in \tau \text{ e } \mathrm{int}(X \setminus B) = \emptyset\}$$

Assim A é magro. □

Proposição 3. *Seja (X, τ) um espaço topológico e (Y, τ_y) um subespaço topológico. Se $A \subset Y$ é magro em Y, então A é magro em X.*

Demonstração. A idéia dessa demonstração é que os fechados sem interior de Y estão contidos em seus próprios fechos em X e esses fechos são fechados e também não têm interior.

A magro em Y $\Rightarrow A \subset \bigcup_n \{F_n^y : F_n^y$ fechado em Y e $\mathrm{int}_y(F_n^y) = \emptyset\}$ Assim,

$$A \subset \bigcup_n \{\overline{F_n^y} : F_n^y \text{ fechado em } Y \text{ e } \mathrm{int}_y(F_n^y) = \emptyset\}$$

$$\text{Porque } \overline{F_n^y}^y = F_n^y = Y \cap \overline{F_n^y}$$

Como $\mathrm{int}_y(F_n^y) = \emptyset$ então $\mathrm{int}(F_n^y) = \emptyset$ (porque $F_n^y \subset Y$). E também

$$\emptyset = \mathrm{int}_y(F_n^y) = \mathrm{int}(\overline{F_n^y}) \cap Y$$

Assim

$$\mathrm{int}(\overline{F_n^y}) = \emptyset$$

Logo

$$A \subset \bigcup_n \{\overline{F_n^y} : \overline{F_n^y} \text{fechado e } \mathrm{int}\overline{F_n^y} = \emptyset\}$$

Assim A é magro. □

A seguir iremos provar algumas equivalências sobre conjuntos magros e definir um tipo especial de espaço topológico.

2. Definição de Espaço de Baire

Proposição 4. *Seja (X, τ) um espaço topológico, as seguintes proposições são equivalentes:*

EB1 *Se $\{O_n\}$ é uma sequência de abertos densos em X, então, se $G = \bigcap_n O_n$, G é denso em X*

EB2 *Se $\{F_n\}$ é uma sequência de fechados sem interior, então $M = \bigcup_n F_n$ não tem interior*

EB3 *Todo conjunto aberto não vazio de X não é magro*
EB4 *O complementar de um conjunto magro de X é denso em X*

Demonstração. (EB1) $\Leftrightarrow$ (EB2)

$\{F_n\}$ é uma sequência de fechados sem interior e $M = \bigcup_n F_n$ tem interior vazio $\Leftrightarrow$ $\{X \setminus F_n\}$ é uma sequência de abertos densos e $X \setminus M$ é denso $\Leftrightarrow$ $\{X \setminus F\}$ é uma sequência de abertos densos e $G = \bigcap_n (X \setminus F)$ é denso

EB2 $\Rightarrow$ EB3

Se M é magro, então $M \subset \bigcup_n F_n$ e logo M está contido em um conjunto que não tem interior e, logo, M não tem interior. Se M é aberto, M é vazio.

não(EB4) $\Rightarrow$ não(EB3) (EB3 $\Rightarrow$ EB4)

Seja M um conjunto magro cujo complementar não seja denso em X. Então existe um aberto A tal que $X \setminus M \cap A = \emptyset$ isto é $A \subset M$, ou ainda int$M \neq \emptyset$. Mas int$M \subset M$. Assim int$M$ é magro, aberto e não vazio.

não(EB1) $\Rightarrow$ não(EB4) (EB4 $\Rightarrow$ EB1)

Seja $\{O_n\}$ uma sequência de conjuntos abertos e densos tais que $G = \bigcap_n O_n$ não seja denso. Então:

$$X \setminus G = X \setminus \bigcap_n O_n = \bigcup_n X \setminus O_n$$

Mas $X \setminus O_n$ são conjuntos fechados sem interior. Assim $X \setminus G$ também é magro e seu complementar não é denso./

$\square$

Definição 3 (Espaço de Baire)**.** *Dizemos que (X, τ) é um espaço de Baire se satisfizer EB1, EB2, EB3 ou EB4 (pela proposição anterior, se (X, τ) é um espaço de Baire, então satisfaz todas as outras).*

Proposição 5. *Seja X um espaço de Baire. Então:*

(1) *Se X é não magro.*
(2) *Todo aberto $A \subset X$ (com a topologia induzida de subespaço) é um espaço de Baire.*
(3) *Todo $G_\delta \subset X$ denso (com a topologia induzida de subespaço) é um espaço de Baire.*
(4) *Se $M \subset X$ é um conjunto magro, $X \setminus M$ (com a topologia induzida de subespaço) é um espaço de Baire.*

Demonstração. (1) Como X é aberto em X, se X é não vazio, X é não magro por [EB3].

(2) *A idéia aqui é transferir a sequência de abertos densos do subespaço para o espaço. Para isso, precisaremos fortemente do fato de que o subespaço é aberto*

Suponha que exista uma sequencia $\{O_n\}$ de abertos e densos de A tal que $\bigcap_n O_n$ não denso. Então, se definirmos $O'_n =$

$O_n \cup (X \setminus \overline{A})$, O'_n são abertos (união de dois abertos, já que A é aberto). Além disso, provaremos que O'_n são densos em X. Se B é aberto,

$$B \cap O'_n = (B \cap O_n) \cup (B \setminus \overline{A})$$

Se $B \cap O_n = \emptyset$, $B \subset X \setminus O_n$. Além disso, $B \not\subset \overline{A}$, porque nesse caso teríamos $B \cap O_n \neq \emptyset$. Então $B \subset X \setminus \overline{A}$. Se $B \neq \emptyset$, então $B \cap O'_n \neq \emptyset$. Reciprocamente, se $B \setminus \overline{A} = \emptyset$ então $B \subset \overline{A}$ e assim $B \cap O_n \neq \emptyset$ pela densidade de O_n.

Assim $O'n$ é denso em X. Mas $\bigcap_n \{O'_n\} = (X \setminus \overline{A}) \cup \bigcap_n \{O_n\}$ não é denso em X.

(3) Seja $G = \bigcap_n O_n$, onde O_n são abertos densos de X e seja $\{A_n\}$ uma sequencia de abertos densos em G (e, logo, em X). Então, $A_m = G \cap U_m$, onde $\{U_m\}$ é uma sequência de abertos de X. Vamos provar que U_m é denso em X. Se B é um aberto de X, $B \cap A_m = G \cap (B \cap U_m)$. Se $B \cap U_m = \emptyset$, A_m não seria denso em X. Logo U_m é denso em X.

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_m G \cap U_m$$
$$\bigcap_n A_n = \bigcap_m \bigcap_{n'} O_{n'} \cap U_m$$
$$\bigcap_n A_n = \bigcap_{(m,n')} O_{n'} \cap U_m$$

Mas, para cada m e para cada n', $O_{n'} \cap U_m$ é um aberto denso. Assim, como X é espaço de Baire, $\bigcap_n A_n$ é denso em X e em G e, logo, G é subespaço de Baire.

(4) $X \setminus M$ é denso, porque X é espaço de Baire G_δ denso (podemos tomar G_δ como $\mathrm{int}(X \setminus M)$ sabemos por (3) que tal G_δ é também espaço de Baire) assim, se $\{A_n\}$ for uma sequencia de abertos densos em $X \setminus M$, então $\{A_n\}$ é uma sequência de abertos densos em G_δ. Assim, $\bigcap_n A_n \cap G_\delta$ é denso em G_δ e, logo, denso em $X \setminus M$. Se B for um aberto de $X \setminus M$ tal que $\bigcap_n A_n \cap B = \emptyset$, então $\bigcap_n A_n \cap G_\delta \cap B = \emptyset$ e G_δ não seria espaço de Baire.

□

Teorema 1 (Teorema de Baire)**.** *Todo espaço métrico completo com a topologia induzida pela métrica e todo espaço regular localmente compacto é um espaço de Baire*

Demonstração. Seja X um espaço métrico completo ou um espaço regular localmente compacto. Seja $\{A_n\}$ uma sequência de conjuntos abertos densos em X. Iremos mostrar que, para qualquer aberto $O \subset X$, $\bigcap A_n \cap O \neq \emptyset$. Iremos definir a seguinte sequência de conjuntos abertos não vazios da seguinte forma: fixe O aberto não vazio de X e tome

$a_0 = O$. Como A_0 é denso em X, $a_0 \cap A_0$ é não vazio e, como X é regular (todo espaço topológico com a topologia induzida por uma métrica completa é regular), existe $a_1 \in X$ aberto tal que $\overline{a_1} \subset a_0 \cap A_0$. Dado a_n, construiremos a_{n+1} como o conjunto aberto cujo fecho está contido em $a_n \cap A_n$ pela regularidade de X.

Assim:

$$\bigcap_n \overline{a_n} = O \cap \bigcap_n \overline{a_{n+1}} \subset O \cap \bigcap_n (A_n \cap a_n)$$

$$O \cap \bigcap_n (A_n \cap a_n) \subset O \cap \bigcap_n A_n = O \cap G$$

$$\text{Assim } \bigcap_n \overline{a_n} \subset O \cap G$$

.

Desde que essa intersecção seja não vazia, nosso resultado está provado. Precisamos mostrar que $\bigcap_n \overline{a_n} \neq \emptyset$.

Caso 1 (X é um espaço métrico completo)**.** *Basta tomar uma sequência tal que* $\lim_{n\to\infty} diam(a_n) = 0$ *e* $\overline{a}_{n+1} \subset \overline{a}_n$. *Fixado* $x_0 \in \overline{O}$, *existe uma bola aberta* B_0 *com centro* x_0 *e diâmetro* d *tal que* $B_0 \cap O \neq \emptyset$.

Vamos tomar $a_1 = B_0 \cap O$

Da mesma forma, fixado $x_1 \in \overline{B_0 \cap O}$ *existe uma bola aberta* B_1 *com centro* x_1 *e diâmetro* $d/2$ *tal que* $B_1 \cap a_1 \neq \emptyset$. *Dado o enésimo termo da sequência, construiremos* a_{n+1} *da seguinte forma: tome* $x_{n+1} \in \overline{a_n}$, *como* a_n *é aberto, então existe uma bola* B_{n+1} *de centro* x_{n+1} *tal que* $B_{n+1} \cap a_n \neq \emptyset$ *(porque* x_{n+1} *é ponto de acumulação de* a_n*) e* $diam(B_{n+1}) < \frac{d}{2^n}$. *Tomaremos* $a_{n+1} = B_{n+1} \cap a_n$. *Como cada* $x_n \in a_n$, *e* $a_{n+1} \subset a_n$, *mostraremos que* $\bigcap \overline{a_n} \neq \emptyset$ *mostrando que a sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente. Para tanto, mostraremos que é de Cauchy.*

Fixado $\epsilon \in \mathbb{R}$, *se tomarmos* n_0 *tal que* $\frac{log(\frac{d}{\epsilon})}{log2} < n_0$ *então,* $d(x_n, x_{n+p}) < \frac{d}{2^n} \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$. *Para todo* $n > n_0$ *e todo* $p \in \mathbb{N}$.

Assim, x_n *é de Cauchy, logo é convergente e a intersecção dos* a_n *é não vazia.*

Caso 2 (X é um espaço localmente compacto)**.** *Se* X *for um espaço localmente compacto, basta tomar* a_n *de forma que* $\overline{a_n}$ *seja compacto.*

□

3. Exemplos de Aplicações do Teorema de Baire

Baseado na exposição de 27/03/09

Exemplo 1. $\mathbb{Q}$ *não é um espaço de Baire com a topologia induzida de* $(\mathbb{R}, \tau)$ *(onde* τ *é a topologia usual da reta): seja* $\{q_n\}$ *uma enumeração dos racionais. Então* $\bigcup_n q_n = \mathbb{Q}$ *e, assim,* $\mathbb{Q}$ *satisfaz não([EB2]).*

Exercício 1. *Fixado $\epsilon > 0$, O_ϵ indica a reunião enumerável de intervalos abertos tal que $\mathbb{Q} \subset O_\epsilon$ e cuja soma dos comprimentos é menor ou igual a ϵ. Demonstrar que o conjunto $\bigcap_n O_{\frac{1}{n}}$ contém números irracionais.*

Solução 1. *$\mathbb{R}$ é espaço de Baire (porque é um espaço métrico completo). É óbvio que para cada ϵ O_ϵ é denso (se existisse um aberto tal que $B \cap B_\epsilon = \emptyset$, então $B \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, o que é um absurdo porque $\mathbb{Q}$ é denso). Assim, $\bigcap_n O_{\frac{1}{n}}$ é G_δ denso e é um subespaço de Baire. Se não houvesse pontos irracionais, teríamos $\bigcup_n q_n = \bigcap_n O_{\frac{1}{n}}$, onde $\{q_n\}$ é uma enumeração dos racionais. Um absurdo, porque $\bigcup_n q_n$ a união de uma sequencia de fechados sem interior e, logo, não poderia ter interior (e $\bigcap_n O_{\frac{1}{n}}$ é o espaço todo e logo é aberto).*

Exercício 2. *Seja E um espaço vetorial normado com base algébrica infinita enumerável (i.e. existe um subconjunto infinito enumerável $B \subset E$ tal que qualquer elemento de E se escreve (de uma só forma) como uma combinação linear finita de elementos de B). Prove que E não é espaço de Baire.*

Iremos mostrar agora que o conjunto das funções deriváveis é magro em $[0, 1]$. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 1. *Se $f \in [0, 1]$ tem derivada a direita em x_0, então*

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| \leq n \text{ e } x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \text{ e } h \in]0, \frac{1}{n}]$$

Demonstração. Como f é derivável a direita em x_0, existe $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$0 < h < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \epsilon$$

Usando a desigualdade triangular

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| < \epsilon + |f'(x_0)|$$

Tome $n > \max\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{1-x_0}, |f'(x_0)| + \epsilon\}$ e o resultado está provado. □

Teorema 2. *Se $F = \{f \in \mathcal{C}[0, 1]$ tal que f tem derivada a direita em algum $x \in [0, 1]\}$, então F é um subconjunto magro de $\mathcal{C}[0, 1]$*

Demonstração. Pelo lema 1, $F \subset \bigcup_n F_n$ onde

$$F_n = \{f \in (C)[0, 1] \text{ tal que } \exists x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$$
$$\text{tal que } \left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| \leq n \forall h \in]0, \frac{1}{n}]\}$$

Iremos provar que cada F_n é fechado, mostrando que toda sequência convergente de F_n converge para um ponto de F_n (i.e., F_n contém todos os seus pontos de acumulação). De fato, como $[0,1]$ é compacto, podemos utilizar o fato que todas sequência convergente é uniformemente convergente. Iremos mostrar que cada F_n tem interior vazio mostrando que nenhum aberto pertence a F_n

Afirmação 1 (F_n é fechado)**.** *Fixe $n \in \mathbb{N}$, seja $\{f_m\} \subset F_n$ uma sequência de funções de f_m que convirja uniformemente para uma função f. Vamos mostrar que $f \in F_n$. Considere $g, g_m \colon [0, 1-\frac{1}{n}] \times]0, \frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$*

$$g_m(x,h) = \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}$$

$$g(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Então existe $x_m \in [0, 1-\frac{1}{m}]$ tal que $|g_m(x_m, h)| \leq m$, para todo $h \in]0, \frac{1}{n}]$. Fixando h, a função $g_m(x,h)$ converge uniformemente para $g(x,h)$. Existe uma subsequência x_{m_k} convergente para algum x_0.

$$g_{m_k}(x_{m_k}, h) \to g(x_{m_k}, h) \to g(x_0, h)$$

E também

$$|g(x_0,h)| < m \Rightarrow \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| < m$$

Assim $f \in F_n$ e F_n é fechado.

Afirmação 2 (F_n tem interior vazio)**.** *Fixe $n \in \mathbb{N}$. Seja $f \in F_n$. Vamos mostrar que $\forall \epsilon\ B]f, \epsilon[\not\subset F_n$, mostrando que $\forall \epsilon\ \exists g \in (\mathcal{C}[0,1] \backslash F_n)$ tal que $\|f - g\| < \epsilon$. Fixe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, $\forall (r,s) \in [0,1] \times [0,1]$, $|r - s| < \delta \Rightarrow |f(r) - f(s)| < \frac{\epsilon}{4}$. Seja $q > \frac{1}{min[\delta, \frac{\epsilon}{n}, \frac{1}{n}]}$ e $x_k = k/q$, $k = 0, 1, \ldots, q$. Seja $g \in \mathcal{C}[0,1]$ tal que $g(x_k) = f(x_k)$ e $g(x_k + \frac{1}{2q}) = f(x_k) + \frac{3}{4}\epsilon$ e g linear em cada $[x_k, x_k + \frac{1}{2q}]$ e cada $[x_k + \frac{1}{2q}, x_{k+1}]$. Então*

Se tomarmos $h = \frac{1}{2q}$

$$\left| \frac{g(x_k + h) - g(x_k)}{h} \right| = 2q\frac{3}{4}\epsilon = \frac{3}{2}q\epsilon > \frac{3}{2}n$$

e

$$\left| \frac{g(x_{k+1}) - g(x_k + h)}{h} \right| = 2q|f(x_{k+1}) - f(x_k) - \frac{3\epsilon}{4}|$$

$$\geq 2q(\frac{3\epsilon}{4} - |f(x_{k+1}) - f(x)|) \geq q\epsilon \geq n$$

Como g é linear, se $x_0 \in [x_k, x_k + \frac{1}{2q}]$ ou $x_0 \in [x_k + \frac{1}{2q}, x_{k+1}]$ e se tomarmos $h = \frac{1}{2q}$ teremos:

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right| = \left| \frac{g(x_0 - x_k + x_k + h) - g(x_0 - x_k + x_k)}{h} \right|$$

Da linearidade de g

$$\left|\frac{g(x_k+h)-g(x_k)}{h}\right| > n$$

Assim, $g \notin F_n$. *Ainda*
Como g *é linear,* $|f(x_k) - g(x)| \leq \frac{3\epsilon}{4}$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) + g(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{3\epsilon}{4} = \epsilon$$

$$\|f - g\| \leq \epsilon$$

□

Lema 2. *Seja* X *um espaço topológico e* M *um espaço métrico. Seja* $f\colon X \to M$, *indicaremos por* D^f *os pontos de descontinuidade de* f. *Se* ${D^f}_\epsilon$ *representa o conjunto dos* $x \in X$ *tal que existem* r, s *em uma vizinhança de* x *que satisfazem* $d(f(r), f(s)) > \epsilon$, *então* $\forall\epsilon$, ${D^f}_\epsilon$ *é fechado.*

Demonstração. Basta provar que $X \setminus {D^f}_\epsilon$ é aberto, mas $X \setminus {D^f}_\epsilon = \{x \in X$ tal que para qualquer vizinhança V_0 de x, $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$, $\forall x_1 x_2 \in X\}$. Se $p \in X \setminus {D^f}_\epsilon$, seja V_p uma vizinhança de p. Então $V_p \subset X \setminus (D^f)_\epsilon$. Como p foi arbitrário, todo ponto de $X \setminus {D^f}_\epsilon$ está contido numa vizinhança que está contida no conjunto e assim o conjunto é aberto. □

Referências

[1] Hönig, Chaim Samuel *Aplicações da Topologia à Análise*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1976