

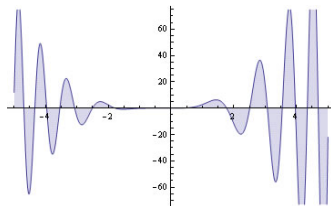
Uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de uma função real

Jonas Renan Moreira Gomes (Bolsista SANTANDER-USP)
Fernanda Soares Pinto Cardona (Orientadora)

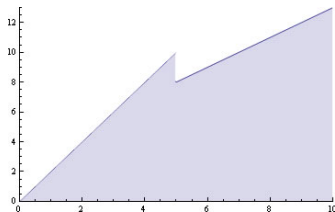
4 de novembro de 2008

Nosso trabalho analisa a relação entre a Riemann-integrabilidade e a quantidade de descontinuidades de uma função. A seguir, alguns fatos sobre essa relação:

Todas as funções contínuas em um intervalo fechado são Riemann-integráveis



Todas as funções limitadas que tem apenas uma descontinuidade em um intervalo fechado são Riemann-integráveis



Funções que são descontínuas em todos os pontos de seu domínio não são Riemann-integráveis.

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Funções que são descontínuas em todos os pontos de seu domínio não são Riemann-integráveis.

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Todas as funções limitadas com uma quantidade *enumerável* de descontinuidades em um intervalo fechado são Riemann-integráveis.

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{se } x \neq \frac{1}{n}, \text{ para todos } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Uma função com o conjunto de descontinuidades enumerável é uma condição suficiente. Seria necessária?

Uma função com o conjunto de descontinuidades enumerável é uma condição suficiente. Seria necessária? Não!

Uma função com o conjunto de descontinuidades enumerável é uma condição suficiente. Seria necessária? Não! Existem funções com o conjunto de descontinuidades não enumerável e que são Riemann-integráveis!

Uma função com o conjunto de descontinuidades enumerável é uma condição suficiente. Seria necessária? Não! Existem funções com o conjunto de descontinuidades não enumerável e que são Riemann-integráveis!

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in C \\ 0, & \text{se } x \notin C \end{cases}$ (Aqui, C representa o conjunto de Cantor)

Uma função com o conjunto de descontinuidades enumerável é uma condição suficiente. Seria necessária? Não! Existem funções com o conjunto de descontinuidades não enumerável e que são Riemann-integráveis!

- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in C \\ 0, & \text{se } x \notin C \end{cases}$ (Aqui, C representa o *conjunto de Cantor*)

Precisamos de uma caracterização para o conjunto de descontinuidades de uma função integrável. Vimos que exigir a *enumerabilidade* não é o suficiente.

Por outro lado, essa caracterização não deve conter todo o domínio da função.

Precisamos de uma caracterização para o conjunto de descontinuidades de uma função integrável. Vimos que exigir a *enumerabilidade* não é o suficiente. Por outro lado, essa caracterização não deve conter todo o domínio da função.

A caracterização que satisfaz esse critério é a de *conjunto de medida zero*.

Definition (Definição)

Dizemos que um subconjunto Z de $\mathbb{R}$ tem medida zero (ou medida de Lebesgue zero) se, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe uma seqüência $\{I_n\}$ de intervalos abertos tais que:

- $Z \subset \bigcup_n I_n$.
- $\sum^\infty D(I_n) < \epsilon$.

O fato de que uma função limitada é integrável somente no caso do conjunto de descontinuidades desta tenha medida zero é conhecido como **“critério de Lebesgue para a Riemann-integrabilidade”**.

A idéia da demonstração do critério é que, se uma função é Riemann integrável, então existem partições do domínio da função tal que a diferença entre a soma superior e a soma inferior da função com respeito a essa partição é arbitrariamente pequena. Como nos pontos de descontinuidade da função a oscilação é não-nula, podemos tornar os intervalos que contém os pontos de descontinuidade arbitrariamente pequenos.

De forma recíproca, se os pontos de descontinuidade de uma função estão contidos em intervalos abertos arbitrariamente pequenos, podemos formar uma partição a partir desses intervalos abertos e, usando o fato de que a função é limitada, podemos reduzir arbitrariamente a diferença entre a soma superior e a soma inferior com respeito aos intervalos que contém os pontos de descontinuidade. Como nos outros pontos a função é contínua, a oscilação da função é arbitrariamente pequena nesses intervalos e obtemos o resultado

Nosso objetivo no trabalho foi *refinar* o critério de Lebesgue, isto é, enfraquecer as hipóteses. Para explicarmos nosso refinamento, vamos introduzir novas formas de caracterizar discontinuidades de uma função.

Nosso objetivo no trabalho foi *refinar* o critério de Lebesgue, isto é, enfraquecer as hipóteses. Para explicarmos nosso refinamento, vamos introduzir novas formas de caracterizar descontinuidades de uma função.

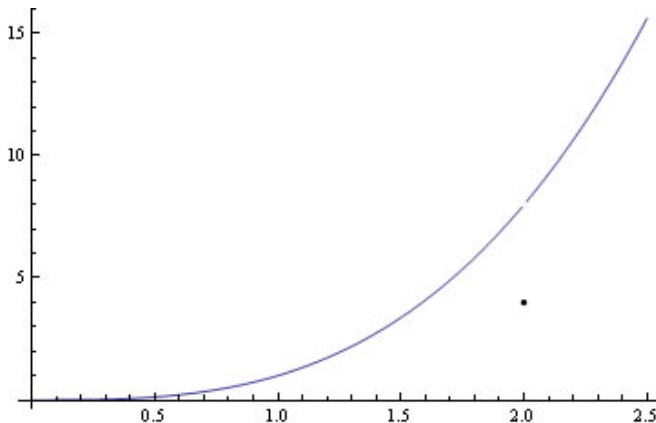
- **Removível:** Uma descontinuidade é removível quando podemos alterar a definição da função no ponto da descontinuidade, de forma que essa função se torne contínua.
- **Salto:** Descontinuidade de salto é aquela em que ambos os limites laterais existem no ponto, mas são diferentes

- **Removível:** Uma descontinuidade é removível quando podemos alterar a definição da função no ponto da descontinuidade, de forma que essa função se torne contínua.
- **Salto:** Descontinuidade de salto é aquela em que ambos os limites laterais existem no ponto, mas são diferentes
- **Essencial de 1ª ordem:** Ambos os limites laterais não existem no ponto.

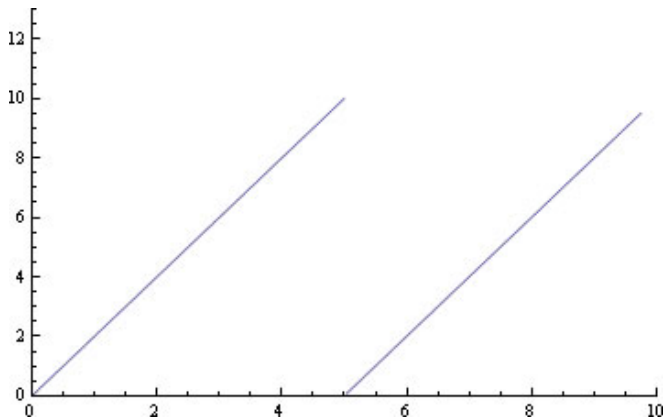
- **Removível:** Uma descontinuidade é removível quando podemos alterar a definição da função no ponto da descontinuidade, de forma que essa função se torne contínua.
- **Salto:** Descontinuidade de salto é aquela em que ambos os limites laterais existem no ponto, mas são diferentes
- **Essencial de 1ª ordem:** Ambos os limites laterais não existem no ponto.
- **Essencial de 2ª ordem:** Apenas um dos limites laterais existe no ponto

- **Removível:** Uma descontinuidade é removível quando podemos alterar a definição da função no ponto da descontinuidade, de forma que essa função se torne contínua.
- **Salto:** Descontinuidade de salto é aquela em que ambos os limites laterais existem no ponto, mas são diferentes
- **Essencial de 1ª ordem:** Ambos os limites laterais não existem no ponto.
- **Essencial de 2ª ordem:** Apenas um dos limites laterais existe no ponto

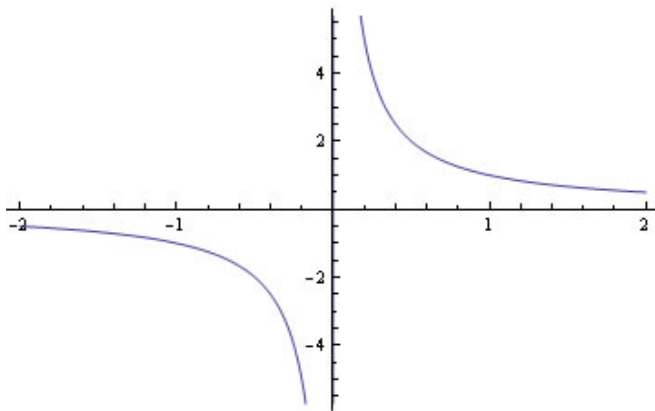
Descontinuidade Removível



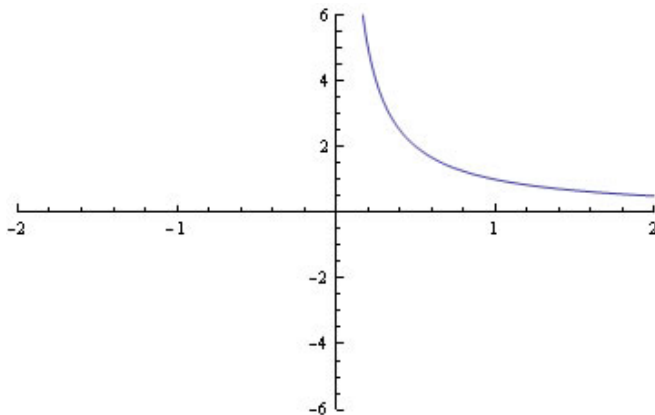
Descontinuidade de Salto



Descontinuidade Essencial de 1ª Ordem



Descontinuidade Essencial de 2ª Ordem



Usando o conceito de oscilação de uma função, provamos que, para qualquer função definida em um intervalo fechado, o conjunto dos pontos de descontinuidade dos tipos removível; de salto; essencial de 2ª ordem; tem sempre **medida zero**.

Obtemos então a seguinte relação para funções definidas em intervalos fechados:

Conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero



O conjunto dos pontos de descontinuidade essencial de 1ª ordem de f tem medida zero.

Obtemos então a seguinte relação para funções definidas em intervalos fechados:

Conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero



O conjunto dos pontos de descontinuidade essencial de 1ª ordem de f tem medida zero.

Assim, usando o critério de Lebesgue, provamos que, para funções limitadas e definidas em intervalos fechados:

f é Riemann-integrável



O conjunto dos pontos de descontinuidade essencial de 1ª ordem de f tem medida zero.



ELON L. LIMA, *Análise Real vol. 1*, Publicações IMPA



KLIPPERT, J., *Advanced Advanced Calculus: Counting the Discontinuities of a Real-Valued Function with Interval Domain*, Mathematics Magazine, 62 **43-48**

Obrigado!

Jonas Renan Moreira Gomes, IME USP (BOLSISTA SANTANDER-USP)

jrenan@gmail.com

Profa. Dra. Fernanda S. P. Cardona, IME USP (ORIENTADORA)

cardona@ime.usp.br