Lista Preparatória pra a P2 referente à Agenda 04

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

1 Sobre a Topologia de $\mathbb{C}$

1. Classifique em domínios e regiões.

1. $B(0,1)$;
2. $0 < |z| < 1$;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{C},\ x + y < 1\}$;
4. $1 < |z - 2| < 2$;
5. Dado $B(z_0, \varepsilon)$ e $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset B(z_0, \varepsilon)$ verifique se $\Omega = B(z_0, \varepsilon) - A$ é domínio.

2 Sobre Curvas no Plano Complexo

1. Sejam $\phi,\ \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ duas curvas em $\mathbb{C}$. Mostre que:

(a) $(\phi(t) + \psi(t))' = \phi'(t) + \psi'(t)$;

(b) $(\phi(t) \cdot \psi(t))' = \phi'(t)\psi(t) + \phi(t)\psi'(t)$.

2. Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva de classe C^1, isto é, ϕ' é uma função contínua. Mostre que:

(a) $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t \phi(s)\, ds = \phi(t)$;

(b) $\displaystyle\int_a^b \phi'(t)\, dt = \phi(b) - \phi(a)$.

*jeancb@ime.usp.br

3. Dadas duas curvas em $\mathbb{C}$, $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$, com $\psi(t) \neq 0$, para todo $t \in [a,b]$. Verifique se vale a Regra de Derivação do Quociente:

$$\left(\frac{\phi}{\psi}\right)' = \frac{\phi'\psi - \phi\psi'}{\psi^2}.$$

3 Funções Complexas a Valores Complexos

1. Esboce como a malha de $\mathbb{C}$ (i.e., o conjunto das retas verticais e horizontais, $\text{Im}\,(z) = y_0$ e $\text{Re}\,(z) = x_0$) é transformada pelas seguintes funções:

(a) $f(z) = z^2$

(b) $f(z) = z + i$;

(c) $f(z) = 2z + i$

2. Se $f(z)$ é uma função definida no disco $B(0;1)$ determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

(a) $w = f(z-2)$

(b) $w = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$

(c) $w = f(2z+i)$

(d) $w = f(z^2)$

(e) $w = f(z^2 - 1)$

3. Mostre, calculando o limite, que as seguintes funções são contínuas em $z_0 \in \text{dom}\,(f)$:

1. $f(z) = c$, c constante;
2. $f(z) = z^2$;
3. $f(z) = \bar{z}$;
4. $f(z) = z^n$

4. Calcule os limites, se existirem:

(a) $\lim_{z\to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z+1}$

(b) $\lim_{z\to 2i} \dfrac{z^2 + 4}{z - 2i}$

(c) $\lim_{z\to i} \dfrac{z(z^2 + (2-i)z - 2i)}{z - i}$

(d) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$

(e) $\lim_{z\to 2i} \dfrac{z^2 - iz + 10i}{z+2}$

(f) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z^2}$

5. Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ duas funções de variável complexa sendo $Im(f) \subset \Omega'$, Ω e Ω' subconjuntos de $\mathbb{C}$. A função $h : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por $h(z) = g(f(z))$ denomina-se função composta de f com g. Se z_0 for ponto de acumulação de Ω e $w_0 = f(z_0)$ ponto de acumulação de Ω', prove que se f é contínua em z_0 e g contínua em w_0, então a composta h é contínua em z_0.

4 Sequências e Séries, Compacidade

1. Analise a convergência das sequências (z_n):

(a) $z_n = 1 + ni$

(b) $z_n = \dfrac{1}{n} + i\dfrac{1}{2^n}$

(c) $z_n = \dfrac{n}{n+1} + ie^{\frac{1}{n}}$

2. Dada $f : K \to \mathbb{C}$ contínua, sendo K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, prove que o $|f(z)|$ possui um mínimo em K

3. Se $f(z) = e^{\frac{-2}{|z|}}$ para $0 < |z| < 1$. é possível definir $f(0)$ de modo que f seja contínua em $z = 0$? Justifique.

4. Usando sequências, mostre que o ramo da função $f(z) = \sqrt{z}$ não é contínua em $z = x_0$, onde $x_0 < 0$.

5 Funções Holomorfas (ou Analíticas)

1. Prove que se $f(z) = z^n$ então $f'(z) = nz^{n-1}$, para todo $z \in \mathbb{C}$

2. Determinar os pontos onde as funções abaixo são diferenciáveis e encontrar sua derivada nesses pontos:

(a) $f(z) = z^2\bar{z}$

(b) $f(z) = f(x+iy) = xy + iy$

(c) $f(z) = f(x+iy) = x^2 + iy^2$

(d) $f(z) = e^{|z|}$

(e) $f(x+iy) = e^x(\cos y + iy)$

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

(g) $f(z) = zIm(z)$

(h) $f(x+iy) = \operatorname{sen} x + \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$

3. Quais das funções acima são analíticas em algum subconjunto (descreva-o) de $\mathbb{C}$? E quais são funções inteiras?

4. Sejam $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^1$. Se u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, mostre que o mesmo ocorrerá com u_1 e v_1 nos seguintes casos:

(a) $u_1 = u^2 - v^2,\ \ v_1 = 2uv$

(b) $u_1 = e^u \cos v,\ \ v_1 = e^u \operatorname{sen} v$

(c) $u_1 = -v,\ \ v_1 = u$

5. Use as condições de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ e $f''(z)$ existem e calcule-as para:

(a) $f(z) = iz + 2$

(b) $f(x+iy) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

(c) $f(z) = z^3$

6. Mostre que a função $f(x+iy) = x^2 + iy^3$ não é analítica em nenhum subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

7. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função derivável [1] que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ onde $z = x + iy$, sendo (r, θ) as e coordenadas polares de z, mostre que as condições de Cauchy-Riemann (em coordenadas polares) são:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

6 Funções Elementares

1. Determine a derivada da função $f(z) = iz^2 e^{1/z}$ e os pontos em que f é derivável.

2. Encontre a imagem de S pela $f(z) = e^z$:

(a) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x = 1, -2 < y < 2\}$

[1] Sugestão: ver pp. 57 e 58 do livro "Variáveis Complexas e Aplicações", 3ª edição, de Geraldo Ávila.

(b) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ y = 2, -1 \leq x \leq 1\}$

(c) $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x_1 \leq x \leq x_2,\ y_1 \leq y \leq y_2\}$

3. Calcule os limites, se existirem:

(a) $\lim_{z\to 0} \dfrac{1 - \cos z}{\operatorname{sen} z}$

(b) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z^2}{z^2}$

(c) $\lim_{z\to 0} z \operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$

(d) $\lim_{z\to 0} \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$

(e) $\lim\limits_{z\to e^{i\frac{\pi}{3}}} (z - e^{\frac{i\pi}{3}}) \dfrac{z}{z^3 + i}$

4. Calcular $f'(z)$, usando regras de derivação, onde:

(a) $f(z) = \operatorname{sen}(z^2) + (2z\cos z - 1)(z^2(1 - z^{-2})^4)$

(b) $f(z) = \operatorname{sen}(z^3 - 1)\cos z + e^{\frac{z-1}{z}}$, $z \neq 0$

5. Determine e represente geometricamente:

(a) $\log(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i)$

(b) $\log(\sqrt{3} + i)$

(c) $\log(2)$

(d) $\log(-i)$

6. Determine as soluções de:

(a) $\log z = \dfrac{\pi}{4} i$

(b) $\log z = -3$

(c) $e^z = 1 + i$

(d) $\operatorname{sen} z = i$

(e) $\tan z = 1$

7. Usando malhas, descreva geometricamente a função logarítmica como uma transformação no plano;

8. Calcule $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1 + az)}{z}$. Deduza disto que

$$\lim_{z\to\infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$