Lista 3 de Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Determinar a diferencial, na forma de funcional linear expresso em termos dos elementos da base $\{dx, dy\}$ de $(\mathbb{R}^2)^*$, das seguintes funções nos seguintes pontos:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(1,1)$;

(b) $g(x,y) = x \cdot \cos(y)$ em $(0,0)$;

(c) $h(x,y) = x^2 + y^3$ em $(2,5)$

(2) O raio e a altura de uma caixa cilíndrica são medidos como tendo 3m e 8m, respectivamente, com erro de ± 0.05m. Usar a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume.

(3) Justificar as seguintes afirmações:

(a) A função $f(x,y) = \sin(x \cdot y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), para qualquer que seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;

(b) A função $f(x,y) = e^{x \cdot y}$ é diferenciável em $(5,2)$;

(c) Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$, então f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int.}(U)$.

A precisão obtida na aproximação de $f = f(x,y)$ por sua (pseudo)-linearização[1], $L(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$, em um ponto (x_0, y_0) em que f é diferenciável depende:

1. da proximidade entre x e x_0;
2. da proximidade entre y e y_0;
3. da curvatura do gráfico de f no ponto (x_0, y_0) (que, por sua vez, depende das derivadas parciais de ordem dois de f)

*jeancb@ime.usp.br

[1] usamos o prefixo "pseudo" porque, a rigor, a menos que tenhamos $f(x_0, y_0) = 0$, a função L será afim, e não linear.

Na verdade, se pudermos encontrar um majorante simultâneo, $M > 0$ para $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right|$ e $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right|$ em um retângulo centrado em (x_0, y_0), somos capazes de limitar o erro máximo cometido ao tomar $L(x, y)$ em vez de $f(x, y)$ por meio da desigualdade:

$$\text{erro} \leq \frac{M}{2} \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)^2 \tag{1}$$

(4) Obter uma (pseudo-)linearização da função $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - 3$ no entorno do ponto $(3, 2)$. O que garante que tal linearização existe? Estimar, usando a desigualdade (1), o erro máximo cometido ao calcular $L(x, y)$ em vez de $f(x, y)$ no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq x \leq 4) \& (1 \leq y \leq 3)\}$

(5) Obter uma (pseudo-)linearização da função $f(x, y) = e^x \cdot \cos(y)$ em $(0, \pi/2)$, e estimar o erro máximo cometido ao calcular $L(x, y)$ em vez de $f(x, y)$ no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}) \& (0 \leq y \leq \pi)\}$

(6) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se $|a|$ for muito maior que $|b|, |c|, |d|$, para quais valores de a, b, c e d o valor do determinante:

$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

é mais sensível?Justifique sua resposta.

(7) Este exercício fornece um exemplo de que a **Regra da Cadeia** *não* se aplica quando a função $f = f(x, y)$ não é diferenciável. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

Mostrar que:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$;

(b) Se $g(t) = (a \cdot t, b \cdot t), a \neq 0 \neq b$, então $f \circ g$ é diferenciável em $t_0 = 0$ e $(f \circ g)'(0) = \dfrac{ab^2}{a^2 + b^2} \neq 0$;

(c) Verificar que $\nabla f(0, 0) \cdot g'(0) = 0$.

(8) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(0, 0, 0)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$. Se $F(u, v) = f(u - v, u^2 - 1, 3v - 3)$, determinar $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 1)$.

(9) Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em U. Calcular $z'(1)$ nos seguintes casos:

(a) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(3,-1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,-1) = 4$ e $z(t) = f(3t^2, t - 2t^2)$;

(b) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 3$ e $z(t) = f(t-1, t+1)$;

(c) Sendo $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -3$ e $z(t) = f(t^2, 4t-1)$.

(10) Dada $F(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, onde $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, $x(u,v,w) = u^2 v$, $y(u,v,w) = v^2$ e $z(u,v,w) = e^{-uw}$, calcular $\frac{\partial F}{\partial v}$.

(11) Sejam g e σ diferenciáveis tais que $g(x,y) = e^{x+y}$, $\sigma'(0) = (1,2)$ e $\sigma(0) = (1,-1)$. Se $F(t) = g(\sigma(t))$, calcular $F'(0)$.