Gabarito da Lista 08 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Determinar o valor de L para que a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ se } x \neq 2 \\ L, \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

seja contínua.

Solução: Para todo $x \neq 4$, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, ou seja, f é uma função racional cujo denominador nunca se anula ($x \neq 4$), e portanto é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Para que f também seja contínua em $x_0 = 2$, devemos requerer que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = L$$

de modo que basta calcularmos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Verificamos que $\lim_{x\to 2} x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ e que $\lim_{x\to 2} x - 2 = 2 - 2 = 0$, de modo que não podemos simplesmente calcular o limite do quociente como o quociente dos limites. Neste caso, é necessário fatorarmos as expressões do numerador e do denominador por $(x-2)$. Temos, portanto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)}$$

*jeancb@ime.usp.br

Pelo **"O" Teorema**, como para todo $x \neq 2$ vale:

$$\frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = (x+2)$$

segue que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4.$$

Assim, para que f seja contínua em $x_0 = 2$, devemos tomar $L = 4$.

(2) A função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+1}, \text{ se } x \neq -1 \\ 2, \text{ se } x = -1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = -1$? E em $x_0 = 0$?

Solução: A função:

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2+x}{x+1} \end{array}$$

é uma função racional, portanto é contínua em todo o seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Como $0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, q, e portanto f, é contínua em $x_0 = 0$. Para verificar se f é contínua em $x_0 = -1$, devemos confrontar 2 e:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1}$$

Como $\lim_{x\to -1} x^2 + x = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ e $\lim_{x\to -1} x + 1 = (-1) + 1 = 0$, não podemos simplesmente calcular o limite do quociente como o quociente dos limites. Precisamos fatorar o numerador e o denominador da expressão por $(x - (-1)) = (x + 1)$. Escrevemos, para todo $x \neq -1$:

$$\frac{x^2+x}{x+1} = \frac{x\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = x$$

Devido a **"O" Teorema**, segue que:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to -1} x = -1$$

Como:

$$2 = f(-1) \neq \lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

segue que f é descontínua em $x_0 = -1$.

(3) Calcular os seguintes limites laterais.

(a) $\lim_{x\to 0_+}\dfrac{|x|}{\sqrt{x}}$

Solução: Devemos calcular:

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{|x|}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{\sqrt{x}}$$

Para todo $x>0$, podemos escrever $|x| = x$, de tal modo que podemos escrever:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

(b) $\lim_{x\to 1_+}\dfrac{4}{5}x^5$

Solução: Temos:

$$\lim_{x\to 1_+}\frac{4}{5}x^5 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{4}{5}x^5 = \frac{4}{5}\cdot 1^5 = \frac{4}{5}$$

(c) $\lim_{x\to 2_+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

Solução: Temos:

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{4-4+1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(d) $\lim_{x\to 1_-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

Solução: Temos:

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{|x-1|}{x-1}$$

Para todo $x > 1$, temos $|x-1| = x-1$, logo:

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

(4) Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, verifique que $\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua em 1? Por quê?

Solução: por um lado, temos:

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

Como $\lim_{x\to 1} x^2-3x+2 = 0$ e $\lim_{x\to 1} x-1 = 0$, não podemos calcular o limite simplesmente tomando o quociente. Precisamos fatorar o numerador e o denominador. Podemos escrever:

$$x^2-3x+2 = (x-1)\cdot(x+2)$$

$x-1 = 1\cdot(x-1)$

Temos para todo $x \neq 1$, $x < 1$:

$$\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}} = x+2$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x+2 = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3$$

Analogamente, temos:

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+2 = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3$$

Muito embora os limites laterais existam e sejam iguais, não podemos sentenciar nada a respeito da continuidade ou descontinuidade de f em 1 – uma vez que 1 não pertence ao domínio da função.

(5) Antes de fabricar cilindros para uma área de seção transversal de 9cm^2 para um certo motor, você precisa saber qual desvio pode aceitar em relação ao diâmetro do cilindro ideal, que é de $x_0 = 3.385$cm, e ter ainda a área diferindo de, no máximo, 0.01cm^2 dos 9cm^2 necessários. Para descobrir isso, você faz $A = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ e procura o intervalo no qual tem que manter x para fazer $|A-9| \leq 0.01$. Qual intervalo você encontra?

Solução: Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que valha:

$$0 < |x-3.385| < \delta \Rightarrow \left|\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9\right| < 0.01$$

ou seja, queremos uma condição suficiente para que $\left|\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9\right| < 0.01$. Assim,

$$\left|\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9\right| < 0.01 \iff -0.01 < \pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9 < 0.01 \iff 8.99 < \pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 < 9.01$$

$$\iff \frac{8.99}{\pi} < \left(\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{9.01}{\pi} \iff \frac{8.99}{\pi} < \frac{x^2}{4} < \frac{9.01}{\pi} \iff \frac{35.96}{\pi} < x^2 < \frac{36.04}{\pi}$$

$$\iff 11.44642351 < x^2 < 11.4718883$$

Para que isto ocorra, é <u>suficiente</u> que:

$$\iff \sqrt{11.44642351} < x < \sqrt{11.4718883} \iff 3.383256347 < x < 3.387017611$$

O intervalo será, portanto, $]3.383256347, 3.387017611[$.