Cálculo no $\mathbb{R}^n$
Agenda 3

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Apresentação

Nesta agenda estenderemos fórmula de Taylor para funções com mais de uma variável real a valores reais. Esta fórmula fornece, sob certas condições, aproximações polinomiais para funções de duas variáveis reais a valores reais. Os n primeiros termos, como veremos, serão derivadas parciais da função, e o último nos dará o erro cometido na aproximação – tal como visto no caso de uma variável, em Cálculo I.

2 Polinômio de Taylor de Funções de Duas Variáveis

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ e $H = (u, v) \neq (0, 0)$ tais que:

$$[P_0, P_0 + H] = \{(1-t)P_0 + t(P_0 + H) \mid t \in [0,1]\} = \{P_0 + tH \mid t \in [0,1]\} \subseteq U$$

Consideremos o caminho:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,1] & \to & U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v) \end{array}$$

e a função composta $\Phi(t) = f(\gamma(t))$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (f \circ \gamma)(t) = f(x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v) \end{array}$$

que nos dá os valores que f assume no segmento $[P_0, P_0 + H]$. Esta função desempenhará o papel de ligação na extensão do polinômio de Taylor para funções de várias variáveis reais a valores reais.

Pela **Fórmula de Taylor com resto de Lagrange** para funções de uma variável, temos:

*jeancb@ime.usp.br

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0)(1-0) + \frac{\Phi''(t_0)}{2}(1-0)^2$$

para algum $t_0 \in]0,1[$. Usamos a **Regra da Cadeia** para calcular $\Phi'(t)$ e $\Phi''(t)$:

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v), \gamma'(t) \rangle =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v) \cdot v$$

Podemos considerar Φ' como a composição das funções:

$$\begin{array}{rccc} F: & U \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot u + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot v \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,1] & \to & U \\ & t & \mapsto & (x_0 + t \cdot u, y_0 + t \cdot v) \end{array}$$

Desta forma,

$$\Phi''(t) = [\Phi'(t)]' = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) =$$

$$= \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot u, \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot v \right) \cdot (u,v) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\gamma(t)) \cdot u + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\gamma(t)) \cdot v, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\gamma(t)) \cdot u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\gamma(t)) \cdot v \right) \cdot (u,v) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x}(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + tu, y_0 + tv) \cdot v^2$$

onde usamos **Teorema de Schwarz** para agrupar as derivadas parciais mistas de ordem 2, devido ao fato de termos $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

Temos, então:

$$\Phi(1) = f(x_0 + u, y_0 + v)$$

$$\Phi(0) = f(x_0, y_0)$$

$$\Phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) \cdot v$$

e, além disso,

$$\Phi''(t_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + t_0 u, y_0 + t_0 v) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + t_0 u, y_0 + t_0 v) uv + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + t_0 u, y_0 + t_0 v) v^2$$

Definindo:

$$r_{(x_0,y_0)}(u,v) = \frac{\Phi''(t_0)}{2},$$

podemos escrever:

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot v + r_{(x_0,y_0)}(u,v)$$

O polinômio dado por

$$T_1(f)_{(x_0,y_0)}(u,v) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot v$$

é denominado **o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de** (x_0, y_0).

Mostra-se, com o auxílio do seguinte lema, derivado da **Desigualdade do Valor Médio**, que $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \dfrac{r_{(x_0,y_0)}(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$.

Lema 1. *Sejam $\delta > 0$ e:*

$$r : B((0,0),\delta) \to \mathbb{R}$$

uma função de classe $\mathcal{C}^2(B((0,0),\delta),\mathbb{R})$ tais que $r(0,0) = 0$, $\frac{\partial r}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial r}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}(0,0) = 0$. Então:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$$

Demonstração. De fato, observe que $r : B((x_0,y_0),\delta) \to \mathbb{R}$ é, em particular, uma função de classe $\mathcal{C}^1(B((0,0),\delta),\mathbb{R})$ (e portanto diferenciável) que se anula, juntamente com todas as suas derivadas de ordem 1 em $(0,0)$, de modo que segue da definição da diferenciabilidade de r em $(0,0)$ que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u,v)}{\|(u,v)\|} = 0$$

Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado a $t \mapsto r(t \cdot u, t \cdot v)$, para cada $(u,v) \in B((0,0),\delta)$, existe algum $t_0 \in]0,1[$ tal que:

$$r(u,v) = \frac{\partial r}{\partial x}(t_0 u, t_0 v) \cdot u + \frac{\partial r}{\partial y}(t_0 u, t_0 v) \cdot v,$$

logo:

$$\frac{r(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial x}(t_0 u, t_0 v) \cdot t_0 u + \dfrac{\partial r}{\partial y}(t_0 u, t_0 v) \cdot t_0 v}{\|t_0 \cdot (u,v)\| \cdot \|(u,v)\|}$$

Como as derivadas parciais de ordem 1 se anulam, juntamente com todas as derivadas parciais de ordem 2 no ponto $(0,0)$, segue do fato de termos $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y} \in \mathcal{C}^1(B((x_0,y_0),\delta),\mathbb{R})$ que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\frac{\partial r}{\partial x}(t_0 u, t_0 v) - \frac{\partial r}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(0,0) \cdot t_0 u - \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x}(0,0) \cdot t_0 v}{\|(t_0 u, t_0 v)\|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\frac{\partial r}{\partial x}(t_0 \cdot (u,v))}{\|t_0 \cdot (u,v)\|} = 0$$

e

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\frac{\partial r}{\partial y}(t_0 u, t_0 v) - \frac{\partial r}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}(0,0) \cdot t_0 u - \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}(0,0) \cdot t_0 v}{\|(t_0 u, t_0 v)\|} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\frac{\partial r}{\partial y}(t_0 \cdot (u,v))}{\|t_0 \cdot (u,v)\|} = 0$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\frac{\partial r}{\partial y}(t_0 \cdot (u,v))}{\|t_0 \cdot (u,v)\|} = 0$$

Como:

$$\left| \frac{t_0 \cdot u}{\|(u,v)\|} \right| \leq 1 \;\text{ e }\; \left| \frac{t_0 \cdot v}{\|(u,v)\|} \right| \leq 1$$

segue que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\partial r}{\partial x}(t_0 u, t_0 v) \cdot t_0 u + \dfrac{\partial r}{\partial y}(t_0 u, t_0 v) \cdot t_0 v}{\|t_0 \cdot (u,v)\| \cdot \|(u,v)\|} =$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\dfrac{\partial r}{\partial x}(t_0 u, t_0 v)}{\|t_0 \cdot (u,v)\|}}_{\text{infinitésima}} \cdot \underbrace{\frac{t_0 \cdot u}{\|(u,v)\|}}_{\text{limitada}} + \lim_{(u,v)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\dfrac{\partial r}{\partial y}(t_0 u, t_0 v)}{\|t_0 \cdot (u,v)\|}}_{\text{infinitésima}} \cdot \underbrace{\frac{t_0 \cdot v}{\|(u,v)\|}}_{\text{limitada}} = 0$$

$\square$

Teorema 2 (Fórmula de Taylor de Ordem 2). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(x_0, y_0) \in U$ e $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Dado qualquer $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0 + u, y_0 + v) \in U$, podemos escrever:*

$$\begin{aligned} f(x_0+u, y_0+v) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot v + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot u \cdot v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot v^2 \right] + r_{(x_0,y_0)}(u, v) \end{aligned} \tag{1}$$

com:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r_{(x_0,y_0)}(u, v)}{\|(u, v)\|^2} = 0$$

Demonstração. (esboço) Já vimos como deduzir a fórmula, portanto basta demonstrarmos que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r_{(x_0,y_0)}(u, v)}{\|(u, v)\|^2} = 0$$

Para isto, veremos que $r_{(x_0,y_0)}$ se enquadra perfeitamente às condições satisfeitas por r em **Lema 1** . Primeiramente, sendo U aberto e $(x_0, y_0) \in U$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ com $\|(u, v)\| < \delta$ vale $(x_0 + u, y_0 + v) \in U$. Podemos, portanto, restringir $r_{(x_0,y_0)}$ a $B((0, 0), \delta)$, obtendo $r_{(x_0,y_0)} \restriction_{B((0,0),\delta)}$.

Notamos que:

$$\begin{aligned} r_{(x_0,y_0)}(u, v) = f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot v - \\ - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot u \cdot v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot v^2 \right] \end{aligned}$$

é de classe $\mathcal{C}^2(B((0, 0), \delta), \mathbb{R})$. Nota-se, facilmente, que $r_{(x_0,y_0)}(0, 0) = 0$. Em seguida, demonstra-se que todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a dois se anulam em $(0, 0)$.

□

Exemplo 3. *Calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 para a função:*

$$f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$$

em torno do ponto $(0, 0)$.

Solução: Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\cdot\cos(y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x)\cdot\sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x)\cdot\cos(y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -\cos(x)\cdot\sin(y)\ \text{ e }\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sin(x)\cdot\cos(y)$$

de modo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1,\ \text{e}\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Assim, tem-se:

$$f(u,v) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot v + r_{(0,0)}(u,v)$$

onde:

$$r_{(0,0)}(u,v) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_0u,t_0v)\cdot u^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t_0u,t_0v)\cdot u\cdot v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0u,t_0v)\cdot v^2\right]$$

para algum $t_0 \in]0,1[$. O polinômio de Taylor de ordem 1 é, portanto:

$$T_1(f)_{(0,0)}(u,v) = u$$

Temos:

$$|r_{(0,0)}(u,v)| = \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_0u,t_0v)\cdot u^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t_0u,t_0v)\cdot u\cdot v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0u,t_0v)\cdot v^2\right]\right| \overset{\text{Des. Triang.}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_0u,t_0v)\right|\cdot|u|^2 + 2\cdot\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t_0u,t_0v)\right|\cdot|u|\cdot|v| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0u,t_0v)\right|\cdot|v^2|\right]$$

Como, em nosso caso, podemos majorar:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_0u,t_0v)\right|, \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(t_0u,t_0v)\right|\ \text{e}\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0u,t_0v)\right|\ \text{por } 1,$$

o erro máximo cometido será inferior a:

$$\frac{1}{2}[u^2 + 2uv + v^2],$$

ou seja,

$$|r_{(x_0,y_0)}(u,v)| \leq \frac{1}{2}[u^2 + 2uv + v^2].$$

Observação 4. *As fórmulas deduzidas anteriormente para Φ' e Φ'' podem ser obtidas aplicando-se a f os "operadores":*

$$\left(u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) \ e \ \left(u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Esses são os dois primeiros casos de uma fórmula mais geral:

$$\Phi^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\Phi(t) = \left(u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \tag{2}$$

a qual diz que aplicar d^n/dt^n a $\Phi(t)$ dá o mesmo resultado que aplicar o operador:

$$\left(u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

a f depois de expandi-lo pelo ***Teorema Binomial*** *(em vez de usar multiplicação, usa-se composição).*

Se as derivadas parciais até a ordem $n+1$ são contínuas em uma região retangular centrada em (x_0, y_0), poderemos estender a fórmula de Taylor para $\Phi(t)$ a:

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \Phi'(0) \cdot t + \frac{\Phi''(0)}{2!} \cdot t^2 + \cdots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n + \frac{\Phi^{(n+1)}(t_0) \cdot t^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algum $t_0 \in]0,1[$. Tomando $t = 1$, obtemos:

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0) + \frac{\Phi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\Phi^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}, \text{ para algum } t_0 \in]0,1[$$

Quando trocamos as n primeiras derivadas no membro direito dessa última igualdade por suas expressões equivalentes da equação (2), calculada em $t = 0$, obtemos um polinômio, de grau menor ou igual a n, capaz de aproximar a função f, de duas variáveis, no entorno do ponto (x_0, y_0), contanto que a função pertença a uma classe de diferenciabilidade $\mathcal{C}^{n+1}$ em alguma bola aberta centrada neste ponto.

Provamos, portanto, o seguinte:

Teorema 5 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $(x_0, y_0) \in U$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}(U, \mathbb{R})$. Se R for um retângulo centrado em (x_0, y_0) inteiramente contido em U, então para qualquer $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0 + u, y_0 + v) \in R$, tem-se:*

$$\begin{aligned} f(x_0+u, y_0+v) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot v + \\ &+ \frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot u^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot u\cdot v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot v^2\right] + \\ &+ \frac{1}{3!}\cdot\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)u^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_0,y_0)u^2v + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_0,y_0)uv^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)v^3\right] + \\ &\cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(u\cdot\frac{\partial}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^n (f)(x_0,y_0) + r_{(x_0,y_0)}(u,v) \end{aligned} \tag{3}$$

onde:

$$r_{(x_0,y_0)}(u,v) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(u\cdot\frac{\partial}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}(f)(x_0 + t_0\cdot u, y_0 + t_0\cdot v)$$

para algum $t_0 \in]0,1[$.

Exemplo 6. *Calcular a fórmula de Taylor de ordem 3 de $f(x, y) = e^{x+y}$ no ponto $(0, 0)$.*

Solução: Temos:

$$f(0,0) = e^{0+0} = 1, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x+y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^{x+y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = e^{x+y} = \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}(x,y) = e^{x+y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = e^{x+y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = e^{x+y}$$

Assim,

$$f(u,v) = 1 + u + v + \frac{1}{2!}\cdot(u^2 + 2uv + v^2) + \frac{1}{3!}\cdot[u^3 + 3\cdot u^2 v + 3\cdot u\cdot v^2 + v^3] + r(u,v)$$

onde:

$$r_{(0,0)}(u,v) = \frac{t_0^4 \cdot e^{t_0 \cdot (u+v)}}{4!} \cdot \left[u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4\right]$$
para algum $t_0 \in]0,1[$.

O polinômio de Taylor de ordem 3 de f em $(0,0)$ é, portanto:

$$T_3(f)_{(0,0)}(u,v) = 1 + u + v + \frac{1}{2!} \cdot (u^2 + 2uv + v^2) + \frac{1}{3!} \cdot [u^3 + 3 \cdot u^2v + 3 \cdot u \cdot v^2 + v^3]$$

Dizemos, também, que o polinômio acima é uma "aproximação cúbica" para f em torno de $(0,0)$.

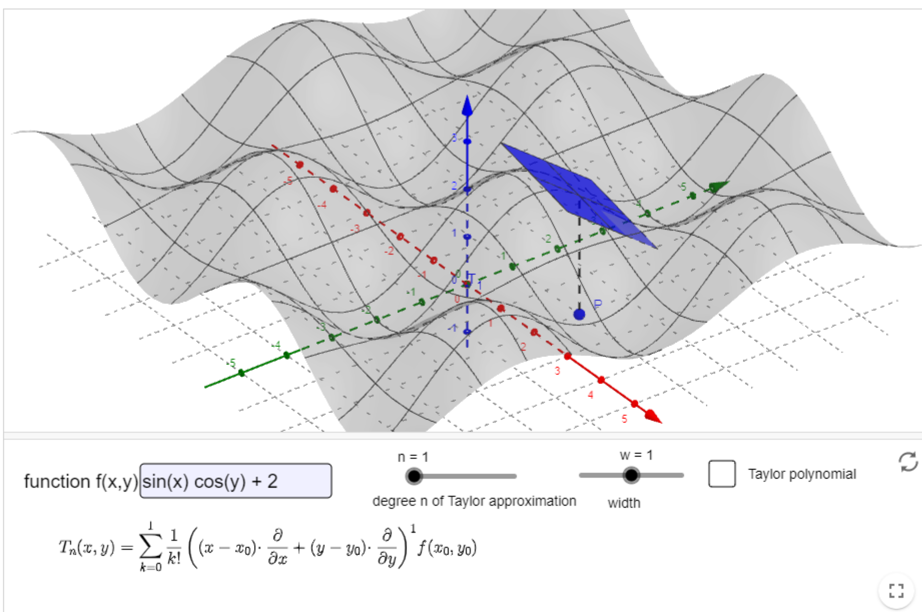


Figura 1: Você pode interagir melhor com o conceito acessando o *applet* https://www.geogebra.org/m/chMpCQz2

Exemplo 7. *Encontrar uma aproximação quadrática de $f(x,y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$ em torno da origem. Qual a precisão da aproximação se $|u| \leq 0.1$ e $|v| \leq 0.1$?*

Solução: Fazendo $n = 2$ em (3), obtemos:

$$f(0+u,0+v) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot v +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot u^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\cdot uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot v^2\right] +$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t_0u,t_0v)u^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(t_0u,t_0v)u^2v + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(t_0u,t_0v)uv^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0u,t_0v)v^3\right],$$

para algum $t_0 \in]0,1[$.

Calculando, obtemos:

$$f(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{(0,0)} = \cos(x)\cdot\sin(y)\Big|_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_{(0,0)} = \sin(x)\cdot\cos(y)\Big|_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Big|_{(0,0)} = -\sin(x)\cdot\sin(y)\Big|_{(0,0)} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Big|_{(0,0)} = \cos(x)\cdot\cos(y)\Big|_{(0,0)} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Big|_{(0,0)} = -\sin(x)\cdot\sin(y)\Big|_{(0,0)} = 0$$

Portanto, temos:

$$\sin(u)\cdot\sin(v) \approx 0 + 0\cdot u + 0\cdot v + \frac{1}{2}[0\cdot u^2 + 2\cdot uv + 0\cdot v^2] = u\cdot v$$

e portanto $\sin(u)\cdot\sin(v) \approx u\cdot v$. O erro cometido na aproximação é:

$$\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t_0u,t_0v)u^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(t_0u,t_0v)u^2v + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(t_0u,t_0v)uv^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0u,t_0v)v^3\right]$$

para algum $t_0 \in]0,1[$. Observando que todas as derivadas de ordem 3 não assumem valor absoluto maior do que 1, por ser produto de senos e cossenos, podemos majorar o erro por:

$$|r_{(0,0)}(u,v)| \leq \frac{1}{6}(|u|^3 + 3|u|^2|v| + 3|u||v|^2 + |v|^3)$$

Assim, para $|u| \leq 0.1$ e $|v| \leq 0.1$, tem-se:

$$|r_{(0,0)}(u,v)| \leq \frac{1}{6}[(0.1)^3 + 3\cdot(0.1)^3 + 3\cdot(0.1)^3 + (0.1)^3] \leq \frac{8}{6}(0.1)^3 \leq 0.00134$$

3 Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis

Conforme vimos quando trabalhamos com funções de uma variável real, funções diferenciáveis eram extremamente adequadas para modelar problemas de otimização, uma vez que do estudo de seus pontos críticos podíamos encontrar extremantes da função. Como as funções diferenciáveis são, em particular, contínuas, sabíamos que em intervalos fechados elas assumiriam valores máximos e mínimos. Um resultado similar é válido para funções de várias variáveis reais em conjuntos compactos (em vez de intervalos fechados e limitados), que enunciamos e demonstramos em seguida.

Começamos introduzindo as noções precisas de máximo e mínimo globais.

Definição 8 (extremante global). *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto qualquer e $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Dizemos que $(x_0, y_0) \in A$ é um* ***ponto de máximo global*** *de f se, e somente se, tivermos:*

$$(\forall (x, y) \in A)(f(x, y) \leq f(x_0, y_0))$$

Analogamente, dizemos que $(x_0, y_0) \in A$ é um ***ponto de mínimo global*** *de f se, e somente se, tivermos:*

$$(\forall (x, y) \in A)(f(x_0, y_0) \leq f(x, y))$$

Nosso próximo passo será enunciar e demonstrar um teorema que nos garanta a existência de extremantes globais para funções contínuas definidas em subconjuntos compactos do plano. Antes de enunciá-lo, no entanto, precisamos do seguinte:

Lema 9. *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto e $f : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Então existem $L, \ell \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$(\forall (x, y) \in K)(\ell \leq f(x, y) \leq L).$$

Demonstração. Sendo f contínua em K, f tem limite em todos os pontos do conjunto, sendo, portanto, pela **Proposição 6** da Agenda 6 limitada em cada um desses pontos. Isto significa que, para cada $(x, y) \in K$ existe $\delta_{(x,y)} > 0$ tal que $f\restriction_{B((x,y),\delta_{(x,y)})}$ é limitada.

Observamos que:

$$K \subseteq \bigcup_{(x,y) \in K} B((x, y), \delta_{(x,y)})$$

ou seja, que $\mathfrak{A} = \{B((x,y),\delta_{(x,y)}) \mid (x,y) \in K\}$ é uma cobertura aberta para K. Em virtude da compacidade de K, esta cobertura admite uma **subcobertura finita**, ou seja, existem pontos $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n) \in K$ tais que:

$$K \subseteq B((x_1,y_1),\delta_{(x_1,y_1)}) \cup \cdots \cup B((x_n,y_n),\delta_{(x_n,y_n)})$$

Como $f \restriction_{B((x_i,y_i),\delta_{(x_i,y_i)})}$ é limitada para todo $i \in \{1,\cdots,n\}$, existem $\ell_1,\cdots,\ell_n,L_1,\cdots,L_n$ tais que para cada i tem-se:

$$(\forall (x,y) \in B((x_i,y_i),\delta_{(x_i,y_i)}))(\ell_i \leq f \restriction_{B((x_i,y_i),\delta_{(x_i,y_i)})} (x,y) \leq L_i)$$

Se tomarmos $L = \max\{L_1,\cdots L_n\}$ e $\ell = \min\{\ell_1,\cdots,\ell_n\}$, teremos, portanto:

$$(\forall (x,y) \in K)(\ell \leq f(x,y) \leq L)$$

$\square$

Teorema 10 (Weierstrass). *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto compacto de (i.e., fechado e limitado em) $\mathbb{R}^2$ e $f : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe um ponto $(\bar{x_1},\bar{x_2}) \in K$ onde f atinge seu extremo superior (máximo global) e um ponto $(\underline{x_1},\underline{x_2}) \in K$ onde f atinge seu extremo inferior (mínimo global).*

Demonstração. Vimos, pelo **Lema 9**, que f é limitada, tanto superior quanto inferiormente.

Uma vez que f é limitada superiormente, o conjunto $\{f(x,y) \mid (x,y) \in K\} \subseteq \mathbb{R}$ admite um supremo. Afirmamos que $L = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in K\}$ é o maior valor atingido por f.

Suponhamos, por absurdo, que f não assuma o valor $L = \sup\{f(x,y)|(x,y) \in K\}$, de modo que para todo $(x,y) \in K$ temos:

$$f(x,y) < L.$$

Podemos, então, definir a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & K \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & L - f(x,y) \end{array}$$

que é tal que para todo $(x,y) \in K$, $g(x,y) > 0$.

Como g é contínua (pois f é contínua) e não se anula em K, a função recíproca de g:

$$\begin{array}{rccc} \frac{1}{g}: & K \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{L - f(x,y)} \end{array}$$

é contínua no compacto K, e portanto é limitada.

Assim sendo, existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$(\forall (x,y) \in K) \left(\frac{1}{L - f(x,y)} < \epsilon \right)$$

Desta forma,

$$\frac{1}{\epsilon} < L - f(x,y)$$

e

$$(\forall (x,y) \in K) \left(f(x,y) < L - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

o que implica que L *não é* $\sup\{f(x,y)|(x,y) \in K\}$ - pois não é a menor das cotas superiores, uma vez que $L - \frac{1}{\epsilon}$ é cota superior para $\{f(x,y)|(x,y) \in K\}$, o que é um absurdo.

Faça como exercício a demonstração para o extremo inferior. □

O teorema acima é um exemplo de teorema que asserciona "existência pura". Esse nos garante, assim, que sempre que f for uma função contínua e seu domínio um conjunto compacto, o extremo superior (máximo) e o extremo inferior (mínimo) de f existem e são realizados por pontos do compacto. No entanto, o teorema não nos indica qualquer "pista" de quais sejam estes pontos. Ao final da agenda, teremos um método que nos permitirá, sob certas condições sobre a função, efetivamente encontrar estes pontos.

Se removermos a hipótese da compacidade do domínio da função contínua f, mas acrescentarmos hipóteses sobre f (como, por exemplo, "ser diferenciável"), também teremos um estudo interessante dos "extremantes" de f em pequenas porções de seu domínio. Tais extremantes estão dados na seguinte:

Definição 11. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função* qualquer. *Dizemos que $(x_0, y_0) \in U$ é **ponto de máximo local de** f caso exista $\delta > 0$ tal que $B((x_0, y_0), \delta) \subseteq U$ e:*

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\delta))(f(x,y) \leq f(x_0,y_0)).$$

*Analogamente, dizemos que $(x_0, y_0) \in U$ é **ponto de mínimo local de** f caso exista $\delta > 0$ tal que $B((x_0, y_0), \delta) \subseteq U$ e:*

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\delta))(f(x_0,y_0) \leq f(x,y)).$$

Se a função em apreço, $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (como a dada na definição anterior) tiver derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ definidas em todos os pontos de U, o teorema a seguir nos determina uma condição <u>necessária</u> para que $(x_0, y_0) \in U$ seja ponto de máximo ou mínimo local de f.

Teorema 12. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que tem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, definidas em todo ponto de U, ou seja, para todo $(x, y) \in U$ existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Se (x_0, y_0) é um ponto de máximo ou de mínimo local, então:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Demonstração. O resultado segue diretamente da definição de derivada parcial.

Suponha, sem perda de generalidade, que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local (o caso em que (x_0, y_0) é ponto de mínimo local é análogo).

Por definição, existe $\delta > 0$ tal que $B((x_0, y_0), \delta) \subseteq U$ e:

$$(\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))(f(x, y) \leq f(x_0, y_0)).$$

Desta forma, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $-\delta < h < \delta$, tem-se:

$$f(x_0 + h, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

e portanto:

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Para valores de h positivos com $h < \delta$ teremos:

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leq 0,$$

de modo que, no limite:

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leq 0.$$

Para valores de h negativos com $-\delta < h$, teremos:

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \geq 0,$$

de modo que no limite:

$$\lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \geq 0.$$

Como por hipótese $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe, ou seja, existe o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$

os dois limites laterais acima devem existir e devem *ser iguais*. Assim, ambos são nulos e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$.

De modo totalmente similar prova-se que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. A prova para o caso em que (x_0,y_0) é ponto de mínimo local é análoga. □

O teorema anterior mostra que se as derivadas parciais de f existem, então todo ponto de máximo ou mínimo local de f é um ponto que anula essas derivadas parciais.

No entanto, eventualmente podemos ter uma função f com um ponto de máximo ou mínimo no qual as derivadas parciais sequer existam, como mostra o próximo:

Exemplo 13. *Considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

Como para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ temos $0\leq x^2+y^2$ e, consequentemente, $0\leq\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$, segue que $(0,0)$ é ponto de mínimo local de f.

Não obstante, nem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nem $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ estão definidas em $(0,0)$.

No caso da existência das derivadas parciais, o **Teorema 12** mostra que devemos procurar os pontos de máximo e mínimo locais de uma função entre aqueles que anulam as derivadas parciais, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Isto motiva a seguinte:

Definição 14. *Sejam $U\subseteq\mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f: U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função com todas as derivadas parciais definidas em todos os pontos de U. Um ponto $(x_0,y_0)\in U$ é um* ***ponto crítico de*** *f se, e somente se,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

O **Teorema 12** diz que pontos de máximos e mínimos locais de uma função definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que existem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em todos os pontos de U, têm que ser pontos críticos desta função. O que podemos dizer quanto à recíproca?

O exemplo a seguir nos mostra que a recíproca é falsa, ou seja, que pontos críticos nem sempre são pontos de máximo ou de mínimo locais.

Exemplo 15. *Considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array}$$

Observe que $(0,0)$ é um ponto crítico de f, uma vez que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2 \cdot 0 = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2 \cdot 0 = 0.$$

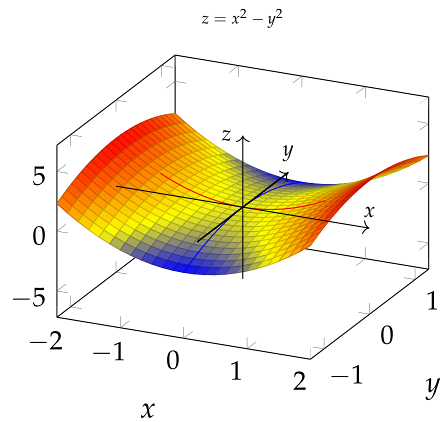
No entanto, $(0,0)$ não é ponto de máximo local de f, pois dado qualquer $\delta > 0$ tomamos $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) \in B((0,0),\delta)$ e teremos:

$$f(0,0) = 0 < \frac{\delta^2}{4} = f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right).$$

$(0,0)$ tampouco pode ser ponto de mínimo local de f, pois dado qualquer $\delta > 0$, tomamos $\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \in B((0,0),\delta)$ e teremos:

$$f\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = 0 - \frac{\delta^2}{4} < 0 = f(0,0).$$

Pontos como este são chamados "os pontos de sela de f"



Em geral, dada uma função $f : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com K compacto, podemos dividir o procedimento para encontrar os pontos de máximo e de mínimo em K em três passos:

1. Relacionar os pontos críticos da função no interior da região compacta K;
2. Relacionar os pontos de fronteira de K onde f tem máximos e mínimos locais e calcular f nesses pontos;
3. Procurar, na relação obtida acima, os valores máximo e mínimo de f.

Exemplo 16. *Encontrar o máximo e o mínimo globais de $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ na região triangular delimitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 9 - x$.*

Solução: **1.** Primeiramente buscaremos os pontos críticos da função. Para tanto, precisamos calcular suas derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 - 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 - 2y$$

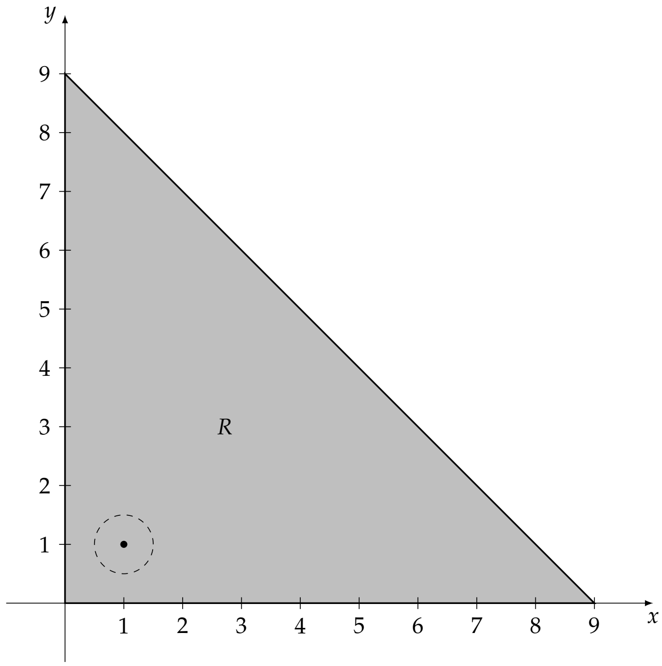
Temos, assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \iff 2 - 2x = 0 \iff x = 1$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff 2 - 2y = 0 \iff y = 1,$$

Observe que o ponto $(1, 1)$ é interior à região R, uma vez que $B\left((1, 1), \frac{1}{2}\right) \subseteq R$. Neste ponto, $f(1, 1) = 4$.



2. Vamos, agora, buscar pontos de fronteira de R onde f assuma máximos e mínimos.

Para isto, notamos que a fronteira de R é composta por três segmentos de reta:

$$R_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 9\}$$

$$R_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 9\}$$

$$R_3 = \{(x,9-x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 9\}$$

ou seja, $\partial R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Temos:

$$f\restriction_{R_1}(x,y) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$$

Em R_1, f assume um máximo local em $(1,0)$. Neste ponto $f(1,0) = 3$.

$$f\restriction_{R_2}(x,y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$$

Em R_2, f assume um máximo local em $(0,1)$. Neste ponto $f(0,1) = 3$.

$$\begin{aligned} f\restriction_{R_3}(x,y) = f(x,9-x) &= 2 + 2x + 2\cdot(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = \\ &= 2 + 2x + 18 - 2x - x^2 - (81 - 18x + x^2) = -61 + 18x - 2x^2 \end{aligned}$$

Em R_3, f assume um máximo local em $\left(\frac{9}{2}, 9-\frac{9}{2}\right)$. Neste ponto $f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = \dfrac{40-81}{2} = -\frac{41}{2}$.

3. Observamos que $\max\left\{-\frac{41}{2}, 3, 4\right\} = 4$ e $\min\left\{-\frac{41}{2}, 3, 4\right\} = -\frac{41}{2}$, e concluímos que f tem um máximo global em $(1,1)$ e um mínimo global em $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

4 A Forma Hessiana na Classificação de Pontos Críticos

Definição 17 (forma bilinear). *Sejam U e V $\mathbb{R}-$espaços vetoriais. Uma função $f : U \times V \to \mathbb{R}$ é uma **forma bilinear** se, e somente se, para quaisquer $u_1, u_2, u \in U$ e $v_1, v_2, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valerem:*

(a) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$

(b) $f(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot f(u, v)$

(c) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$

(d) $f(u, \lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(u, v)$

Exemplo 18. *O produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, dado por:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

é uma forma bilinear.

Exemplo 19. *Seja A uma matriz $m \times n$ fixada, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. A aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} f_A : & M_{m\times 1}(\mathbb{R}) \times M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) & \mapsto & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{array}$$

é uma forma bilinear.

4.1 Matriz de uma Forma Bilinear

Sejam U e V $\mathbb{R}-$espaços vetoriais e $\mathscr{B}_U = \{u_1, \cdots, u_m\}$ e $\mathscr{B}_V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ bases para U e para V, respectivamente. Seja, ainda, $f : U \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear.

Dado qualquer $(\vec{u}, \vec{v}) \in U \times V$, sendo $\mathscr{B}_U$ base para U, existem números reais $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ tais que $\vec{u} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_m \cdot u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot u_i$, e sendo $\mathscr{B}_V$ base para V, existem números reais $\beta_1, \cdots, \beta_n$ tais que $\vec{v} = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot v_j$. Assim, temos:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_m \cdot u_m, \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot v_j\right) \overset{\substack{\text{linearidade na} \\ 1^a \text{coordenada} \\ \uparrow}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot f\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot v_j\right) \overset{\substack{\text{linearidade na} \\ 2^a \text{coordenada} \\ \uparrow}}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_j \cdot f(u_i, v_j)$$

Observe que a igualdade acima equivale a escrever:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(u_1, v_1) & f(u_1, v_2) & \cdots & f(u_1, v_n) \\ f(u_2, v_1) & f(u_2, v_2) & \cdots & f(u_n, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(u_m, v_1) & f(u_m, v_2) & \cdots & f(u_m, v_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Dizemos que a matriz $(f(u_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ é a **matriz da forma bilinear** f com respeito às bases $\mathscr{B}_U$ e $\mathscr{B}_V$.

Exemplo 20. *A matriz da forma bilinear:*

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{array}$$

com respeito à base canônica, $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0), (0,1)\}$ é:

$$\begin{bmatrix} \langle (1,0), (1,0) \rangle & \langle (1,0), (0,1) \rangle \\ \langle (0,1), (1,0) \rangle & \langle (0,1), (0,1) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que podemos escrever:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = [x_1 \ y_1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 21. *Exibir a matriz da forma bilinear dada por:*

$$f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1 \cdot x_2 + 3y_1 \cdot y_2 + 4z_1 \cdot z_2$$

com respeito à base canônica $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Solução: Temos:

$$
\begin{array}{lll}
f((1,0,0),(1,0,0)) = 1 & f((0,1,0),(1,0,0)) = 0 & f((0,0,1),(1,0,0)) = 0 \\
f((1,0,0),(0,1,0)) = 0 & f((0,1,0),(0,1,0)) = 3 & f((0,0,1),(0,1,0)) = 0 \\
f((1,0,0),(0,0,1)) = 0 & f((0,1,0),(0,0,1)) = 0 & f((0,0,1),(0,0,1)) = 4
\end{array}
$$

de modo que a matriz da forma bilinear é:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

Definição 22. *Seja V um $\mathbb{R}-$espaço vetorial. Uma forma bilinear, $f : V \times V \to \mathbb{R}$ é **simétrica** se, e somente se, para quaisquer $u, v \in V$ tivermos:*

$$
f(u,v) = f(v,u)
$$

Definição 23 (forma quadrática induzida por uma forma bilinear simétrica). *Sejam V em $\mathbb{R}-$espaço vetorial e $f : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A função:*

$$
\begin{array}{rccc}
q_f : & V & \to & \mathbb{R} \\
 & \vec{v} & \mapsto & f(\vec{v},\vec{v})
\end{array}
$$

*é a **forma quadrática sobre** V associada à forma bilinear simétrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$.*

Exemplo 24. *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tem-se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, de modo que esta forma bilinear é simétrica. A forma quadrática associada ao produto interno usual é:*

$$
\begin{array}{rccc}
q_{\langle \cdot, \cdot \rangle} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\
 & \vec{v} & \mapsto & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle
\end{array}
$$

Assim, se escrevermos $\vec{v} = (x,y)$, teremos:

$$
q_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x,y) = \langle (x,y),(x,y) \rangle = x^2 + y^2
$$

Um fato de simples verificação é dado a seguir:

Proposição 25. *Se $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática, então q é contínua.*

Quanto à classificação das formas quadráticas, temos a seguinte:

Definição 26. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. A forma quadrática associada, $q_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é:*

(a) ***não-negativa*** *se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tivermos $q_f(x, y) \geq 0$*

(b) ***positiva*** *se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tivermos $q_f(x, y) > 0$;*

(c) ***negativa*** *se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tivermos $q_f(x, y) < 0$;*

(d) ***não-positiva*** *se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tivermos $q_f(x, y) \leq 0$*

Nos casos em que q_f é positiva ou negativa, dizemos que q_f é ***definida****. Também, dizemos que a forma quadrática q_f é:*

(e) ***indefinida*** *se, e somente se, existirem $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ tais que $q_f(x, y) > 0$ e $q_f(z, w) < 0$.*

Observação 27. *Toda forma quadrática induzida de uma forma bilinear simétrica, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pode ser representada por uma matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$, a saber:*

$$(f(e_i, e_i))_{1 \leq i \leq n}$$

Observe que, sendo f simétrica, a matriz de q_f também será simétrica.

Proposição 28. *Seja $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática cuja matriz é:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Se $\det A = ac - b^2 > 0$ e $a > 0$, então q é uma forma quadrática ***positiva-definida****.*

Demonstração. Seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer. Tem-se:

$$q(x, y) = [x\ y] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (ax + by) \cdot x + (bx + cy) \cdot y = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}y^2 \right) =$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 + \frac{b^2y^2}{a^2} - \frac{b^2y^2}{a^2} \right) = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{a}y + \frac{b^2y^2}{a^2} \right) - \frac{b^2y^2}{a} + cy^2 =$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{ac}{a}y^2 - \frac{b^2y^2}{a} = a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{(ac - b^2) \cdot y^2}{a}$$

Assim, se tivermos $a > 0$ e $ac - b^2 > 0$, teremos, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$q(x, y) = \overbrace{a}^{>0} \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{\overbrace{(ac - b^2)}^{>0} \cdot y^2}{a} \geq 0.$$

Além disto, teremos $q(x, y) = 0$ se, e somente se:

$$a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{(ac - b^2) \cdot y^2}{a} = 0,$$

ou seja, se tivermos simultaneamente $x + \frac{b}{a}y = 0$ e $y^2 = 0$. Isto ocorre se, e somente se, $(x, y) = (0, 0)$, de modo que a forma é **positiva-definida**. □

Proposição 29. *Seja $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática cuja matriz é:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Se $\det A = ac - b^2 > 0$ *e $a < 0$, então q é uma forma quadrática* ***negativa-definida****.*

Demonstração. Seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer. Tem-se:

$$q(x, y) = [x \ y] \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (ax + by) \cdot x + (bx + cy) \cdot y = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}y^2\right) =$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2 + \frac{b^2y^2}{a^2} - \frac{b^2y^2}{a^2}\right) = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{a}y + \frac{b^2y^2}{a^2}\right) - \frac{b^2y^2}{a} + cy^2 =$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{ac}{a}y^2 - \frac{b^2y^2}{a} = a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{(ac - b^2) \cdot y^2}{a}$$

Assim, se tivermos $a < 0$ e $ac - b^2 > 0$, teremos, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$q(x,y) = \overbrace{a}^{<0} \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{\overbrace{(ac-b^2)}^{>0} \cdot y^2}{\underbrace{a}_{<0}} \leq 0.$$

Além disto, teremos $q(x,y) = 0$ se, e somente se:

$$a \cdot \left(x + \frac{b}{a} \cdot y\right)^2 + \frac{(ac-b^2) \cdot y^2}{a} = 0,$$

ou seja, se tivermos simultaneamente $x + \frac{b}{a}y = 0$ e $y^2 = 0$. Isto ocorre se, e somente se, $(x,y) = (0,0)$, de modo que a forma é **positiva-definida**. □

Nosso próximo objetivo é associar a cada função $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ uma certa forma quadrática, que nos auxiliará na classificação de pontos críticos.

Definição 30 (forma hessiana). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. A **forma quadrática hessiana** associada a f no ponto $(x_0,y_0) \in U$ é aquela cuja matriz é:*

$$\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Assim, dados um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, um ponto $(x_0,y_0) \in U$ e uma função $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$, tem-se, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) \cdot (u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \cdot u \cdot v + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \cdot v^2,$$

que é exatamente o termo assinalado em azul na equação (1). Podemos escrever, portanto, a fórmula de Taylor de ordem 2 de uma função de classe $\mathcal{C}^2$ como:

$$f((x_0,y_0) + (u,v)) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) \cdot (u,v) + \frac{1}{2!}\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) \cdot (u,v) + r_{(x_0,y_0)}(u,v),$$

onde $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \dfrac{r_{(x_0,y_0)}(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$.

Exemplo 31. *A forma hessiana da função:*

$$\begin{array}{rccc} f : & U \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

no ponto $(1,1)$ é dada por:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}(f)(1,1): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & [u\ v]\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{array}$$

ou seja, $\mathcal{H}(f)(1,1)\cdot(u,v) = 2u^2 + 2v^2$.

Exemplo 32. *A forma hessiana da função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array}$$

no ponto $(0,0)$ é dada por:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}(f)(0,0): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & [u\ v]\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{array}$$

ou seja, $\mathcal{H}(f)(0,0)\cdot(u,v) = 2u^2 - 2v^2$.

Exemplo 33. *A forma hessiana da função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & U\subseteq\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2\cdot\cos(x\cdot y) \end{array}$$

no ponto $(0,\pi)$ é obtida calculando-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot\cos(x\cdot\ y)\right) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\cdot\cos(x\cdot\ y)\right) = -x^3\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot\cos(x\cdot\ y)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\right) =$$

$$= 2\cos(xy) - 4xy\sin(xy) - x^2y^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot\cos(x\cdot\ y)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)\right) =$$

$$= -3x^2\sin(xy) - x^3 y\cos(xy)$$

*Note que, pelo **Teorema de Schwarz**, não precisamos calcular a outra derivada mista, pois:*

$$(x,y)\overset{\mathcal{C}^2}{\to} x^2, (x,y)\overset{\mathcal{C}^2}{\to} x\cdot y, \theta\overset{\mathcal{C}^2}{\to}\cos(\theta) \Rightarrow (x,y)\overset{\mathcal{C}^2}{\to} x^2\cdot\cos(x\cdot y)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Finalmente, calculamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \cdot \cos(x \cdot y)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x^3 \sin(xy)\right) = -x^4 \cos(xy)$$

Obtemos, portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pi) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,\pi) = 0 \ \textit{e} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pi) = 0$$

no ponto $(0,\pi)$ *é dada por:*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}(f)(1,1): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & [u\ v] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{array}$$

ou seja, $\mathcal{H}(f)(0,\pi) \cdot (u,v) = 0$.

Teorema 34. *Sejam* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *aberto e* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. *Se* $(x_0,y_0) \in U$ *é um ponto crítico de* f *tal que* $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)$ *é positiva-definida, então* (x_0,y_0) *é um ponto de mínimo local de* f.

Demonstração. Pelo **Teorema de Weierstrass**, a função contínua $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sendo positiva, assume um mínimo, digamos $2c > 0$, no conjunto (compacto) $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Assim, para todo $(u,v) \in \mathbb{S}^1$ temos:

$$[\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)] \cdot (u,v) \geq 2c > 0$$

Usamos a **Fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem dois** para escrever, para qualquer $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0+u, y_0+v) \in U$:

$$f((x_0,y_0)+(u,v)) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot v + \frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot \frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} +$$

$$+ r_{(x_0,y_0)}(u,v),$$

onde:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r_{(x_0,y_0)}(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$$

Observe que como (x_0, y_0) é ponto crítico de f, tem-se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, a equação dada anteriormente se reduz a:

$$f((x_0, y_0) + (u, v)) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0, y_0) \cdot \frac{(u, v)}{\|(u, v)\|} + r_{(x_0, y_0)}(u, v)$$

onde:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r_{(x_0,y_0)}(u, v)}{\|(u, v)\|^2} = 0$$

Notando que:

$$\frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0, y_0) \cdot (u, v) = \frac{\|(u, v)\|^2}{2} \cdot \mathcal{H}(f)(x_0, y_0) \cdot \frac{(u, v)}{\|(u, v)\|}$$

concluímos que:

$$\frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0, y_0) \cdot (u, v) = \frac{\|(u, v)\|^2}{2} \cdot \mathcal{H}(f)(x_0, y_0) \cdot \frac{(u, v)}{\|(u, v)\|} \geq \frac{\|(u, v)\|^2}{2} \cdot 2c = \|(u, v)\|^2 \cdot c$$

Deste modo, temos:

$$f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0) = \|(u, v)\|^2 \cdot c + r_{(x_0,y_0)}(u, v)$$

Escrevendo:

$$r_{(x_0,y_0)}(u, v) = \rho(u, v) \cdot \|(u, v)\|^2$$

pode-se expressar:

$$f(x_0 + u, y_0 + v) - f(x_0, y_0) = \|(u, v)\|^2 \cdot c + \|(u, v)\|^2 \cdot \rho(u, v) = \|(u, v)\|^2 \cdot (c + \rho(u, v))$$

e observando que $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \rho(u, v) = 0$, segue que dado $c > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $(x_0 + u, y_0 + v) \in U$, tem-se:

$$0 < \|(u, v) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |\rho(u, v)| < c$$

e portanto:

$$c + \rho(u, v) > c - c = 0$$

Assim, vale:

$$(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2)((x_0 + u, y_0 + v) \in U)$$

$$\Big((u,v) \in B((0,0),\delta) \Rightarrow f(x_0+u,y_0+v) - f(x_0,y_0) = \|(u,v)\|^2 \cdot (c+\rho(u,v)) > 0\Big)$$

de modo que (x_0,y_0) é um mínimo local de f. $\square$

Teorema 35. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. Se $(x_0,y_0) \in U$ é um ponto crítico de f tal que $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)$ é negativa-definida, então (x_0,y_0) é um ponto de máximo local de f.*

Demonstração. Pelo **Teorema de Weierstrass**, a função contínua $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sendo negativa, assume um máximo, digamos $2c < 0$, no conjunto (compacto) $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Assim, para todo $(u,v) \in \mathbb{S}^1$ temos:

$$[\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)] \cdot (u,v) \leq 2c < 0$$

Usamos a **Fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem dois** para escrever, para qualquer $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0+u,y_0+v) \in U$:

$$f((x_0,y_0)+(u,v)) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot v + \frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} +$$

$$+\rho(u,v)\cdot\|(u,v)\|^2,$$

onde:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \rho(u,v) = 0$$

Observe que como (x_0,y_0) é ponto crítico de f, tem-se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, a equação dada anteriormente se reduz a:

$$f((x_0,y_0)+(u,v)) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} + \rho(u,v)\cdot\|(u,v)\|^2$$

Notando que:

$$\frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot(u,v) = \frac{\|(u,v)\|^2}{2}\cdot\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|}$$

concluímos que:

$$\frac{1}{2}\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot(u,v) = \frac{\|(u,v)\|^2}{2}\cdot\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)\cdot\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|} \leq \frac{\|(u,v)\|^2}{2}\cdot 2c = \|(u,v)\|^2\cdot c < 0$$

Deste modo, temos:

$$f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0, y_0) = \|(u,v)\|^2 \cdot c + \rho(u,v) \cdot \|(u,v)\|^2$$

Assim, podemos escrever:

$$f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0, y_0) = \|(u,v)\|^2 \cdot c + \|(u,v)\|^2 \cdot \rho(u,v) = \|(u,v)\|^2 \cdot (c + \rho(u,v))$$

e observando que $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \rho(u,v) = 0$, segue que dado $-c > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $(x_0+u, y_0+v) \in U$, tem-se:

$$0 < \|(u,v) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow |\rho(u,v)| < -c$$

e portanto:

$$c + \rho(u,v) < c - c = 0$$

Assim, vale:

$$(\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2)((x_0+u, y_0+v) \in U)$$
$$\Big((u,v) \in B((0,0),\delta) \Rightarrow f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0,y_0) = \|(u,v)\|^2 \cdot (c+\rho(u,v)) < 0\Big)$$

de modo que (x_0, y_0) é um máximo local de f. □

Teorema 36. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Se $(x_0, y_0) \in U$ é um ponto crítico de f tal que $\mathcal{H}(f)(x_0, y_0)$ é indefinida, então (x_0, y_0) não é nem ponto de máximo local, nem ponto de mínimo local de f.*

Demonstração. Dado $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, como $(x_0, y_0) \in U$ e U é aberto, existe $\eta > 0$ tal que $0 < |t| < \eta$, tem-se $(x_0, y_0) + t \cdot (u,v) \in U$. Lembrando-nos que:

$$\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)(tu,tv) = t^2 \cdot \mathcal{H}(f)\,(x_0,y_0) \cdot (u,v)$$

temos:

$$f(x_0+tu, y_0+tv) - f(x_0,y_0) = t^2 \cdot \|(u,v)\|^2 \cdot \left[\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) \cdot \left(\frac{(u,v)}{\|(u,v)\|}\right) + \rho(tu,tv)\right]$$

com $\lim_{t\to 0} \rho(tu,tv) = 0$.

Segue, assim, que $f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0,y_0)$ tem o mesmo sinal que $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) \cdot (u,v)$. Uma vez que $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0)$ é indefinida, existem (u_0,v_0) e (u_1,v_1) tais que $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) \cdot (u_0,v_0) < 0$ e $\mathcal{H}(f)(x_0,y_0) \cdot (u_1,v_1) > 0$, de modo que $f(x_0+u_0, y_0+v_0) - f(x_0,y_0) < 0$ (e portanto (x_0,y_0) não é ponto de mínimo local) e $f(x_0+u_1, y_0+v_1) - f(x_0,y_0) > 0$ (e portanto (x_0,y_0) não é ponto de máximo local).

□

Podemos resumir os resultados obtidos acima para estabelecer o análogo do "teste da derivada segunda" para funções de duas variáveis reais a valores reais.

Teorema 37 (teste da derivada segunda). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $(x_0, y_0) \in U$ e $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Então:*

(a) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $\det \mathcal{H}(f)(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é mínimo local;

(b) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $\det \mathcal{H}(f)(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é máximo local;

(c) Se $\det \mathcal{H}(f)(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de sela;

(d) Se $\det \mathcal{H}(f)\,(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar sobre a natureza de (x_0, y_0). Temos, neste caso, um "ponto crítico degenerado".

Exemplo 38 (Método dos Mínimos Quadrados e Regressão Linear). *Quando tentamos ajustar uma reta $y = a \cdot x + b$ a um conjunto de pontos de dados numéricos, $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$. Geralmente escolhemos a reta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais dos pontos à reta. Em teoria, isso significa encontrar os valores a e b que minimizam o valor da função:*

$$E(a, b) = (y_1 - (a \cdot x_1 + b))^2 + \cdots + (y_n - (a \cdot x_n))^2$$

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a \cdot x_i + b))^2$$

Para tanto, primeiramente buscamos os pontos críticos, ou seja, valores de a e de b tais que:

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - (a \cdot x_i + b)) \cdot (-x_i) = \sum_{i=1}^{n} [2ax_i^2 + 2bx_i - 2y_i x_i] =$$

$$= 2a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + 2b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (y_i - (a \cdot x_i + b)) \cdot (-1) = \sum_{i=1}^{n} [2ax_i + 2b - 2y_i] =$$

$$= 2a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + 2b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right) - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) = 0$$

o que equivale a resolver o seguinte sistema linear:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i^2) & (\sum_{i=1}^n x_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i) & (\sum_{i=1}^n 1) \end{bmatrix}}^{=M} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i y_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i) \end{bmatrix}$$

Observe que:

$$\det M = \det \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i^2) & (\sum_{i=1}^n x_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i) & (\sum_{i=1}^n 1) \end{bmatrix} = n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 =$$

$$= n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{n^2}{n^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) =$$

$$= n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n^2 \cdot \bar{x}^2 = n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - (n \cdot \bar{x})^2$$

Chegamos, pela ***Regra de Cramer****, em:*

$$a = \frac{\det \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i y_i) & (\sum_{i=1}^n x_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i) & (\sum_{i=1}^n 1) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i^2) & (\sum_{i=1}^n x_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i) & (\sum_{i=1}^n 1) \end{bmatrix}} = \frac{n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i)}{n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i^2) - (n \cdot \bar{x})^2}$$

$$b = \frac{\det \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i^2) & (\sum_{i=1}^n x_i y_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i) & (\sum_{i=1}^n y_i) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i^2) & (\sum_{i=1}^n x_i) \\ (\sum_{i=1}^n x_i) & (\sum_{i=1}^n 1) \end{bmatrix}} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot (\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i^2) - (n \cdot \bar{x})^2}$$

Finalmente, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(2a \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + 2b \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a,b) = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) \right) = \frac{\partial}{\partial b} \left(2a \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + 2b \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial f}{\partial b}(a,b)\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(2a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + 2b \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = 2n > 0$$

de modo que:

$$\mathcal{H}(f)(a,b) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{bmatrix}$$

*Considerando $\vec{u} = (x_1, \cdots, x_n)$ e $\vec{v} = (1, \cdots, 1)$ na **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** ($\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$), obtemos:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1}$$

ou seja, que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

donde segue que:

$$0 \leq 4n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \det \mathcal{H}(f)(a,b)$$

*Observando que $2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, podemos concluir, pelo **Teorema 37**, que (a,b) é, de fato, mínimo local.*

Exemplo 39. *Determinar os pontos críticos de:*

$$f(x,y) = 25x^2 + 4y^2 - 20xy$$

e classificá-los.

Solução: Devemos, primeiramente, buscar os pontos críticos de f, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 50x - 20y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y - 20x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x - 2y = 0 \end{cases}$$

o que nos diz que os pontos críticos de f são os pontos pertencentes à reta $y = \frac{5}{2}x$. Calculamos, em seguida, a forma hessiana ao computar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 50$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -20$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8$$

Assim:

$$\mathcal{H}(f)\left(x, \frac{5x}{2}\right) = \begin{bmatrix} 50 & -20 \\ -20 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma vez que $\det \mathcal{H}(f)\left(x, \frac{5x}{2}\right) = 0$, nada se pode afirmar sobre a natureza desses pontos (são "pontos críticos degenerados"). Devemos, deste modo, utilizar outro método para classificar estes pontos críticos.

Notamos, no entanto, que:

$$f(x,y) = 25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x)^2 - 2 \cdot (5x) \cdot (2y) + (2y)^2 = (2y - 5x)^2 \geq 0$$

Como nos pontos da reta $y = \frac{5}{2}x$ tem-se $f(x, 5x/2) = 0$, estes pontos são mínimos absolutos da função.

Referências

[1] Pinto, D., Morgado, M.C.F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, 2014.

[2] Domingues, H., Callioli, C., Costa, R. *Álgebra Linear e Aplicações*, Editora Atual, 1982.

[3] Lima, E. L. *Análise Real volume 2 – Funções de n Variáveis*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.

[4] Mendes, C. M., CÁLCULO III - NOTAS DE AULA, São Carlos, 1988. Cópia digital disponível em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma332/claudio.pdf.

[5] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.