MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral I
1^o semestre de 2025
Agenda 13

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos algumas das principais técnicas de integração: o método da substituição, o da substituição trigonométrica, o da integração por partes, o das frações parciais, dentre outros, sempre com diversos exemplos.

1 Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Algumas vezes, é possível determinar a integral de uma dada função aplicando uma das fórmulas básicas depois de ser feita uma mudança de variável. Esse processo é análogo à regra da cadeia para derivação e pode ser justificado como segue.

Sejam f e F duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja inteiramente contida no domínio de F. Podemos considerar a função composta $F \circ g$.

Pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

isto é, $F \circ g$ é uma primiriva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Temos, então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c \tag{1}$$

Fazendo $u = g(x)$ na equação acima, tem-se:

*jeancb@ime.usp.br

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c}$$

Na prática, devemos então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

Exemplo 1 *Calcular:*

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Solução: Fazemos a mudança de variável $u(x) = 1 + x^2$, de modo que $u'(x) = 2x$. Neste caso, $f(u) = \frac{1}{u}$, e portanto:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2xdx = \int \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1+x^2| + C$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1+x^2| + c = \ln(1+x^2) + c.$$

Exemplo 2 *Calcular:*

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)dx.$$

Solução: Se fizermos $u = \sin(x)$, teremos $u'(x) = \cos(x)$. Neste caso, $f(u) = u^2$, de modo que:

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int u^2du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

Exemplo 3 *Calcular:*

$$\int \sin(x+7)dx$$

Solução: Fazendo $u(x) = x + 7$, temos $u'(x) = 1$. Neste caso, $f(u) = \sin(u)$, de modo que:

$$\int \sin(x+7) \cdot 1dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int \sin(u)du = -\cos(u) + c = -\cos(x+7) + c.$$

Exemplo 4 *Calcular:*

$$\int \tan(x)dx$$

Solução: Podemos escrever:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

de modo que:

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx.$$

Aqui fazemos $u(x) = \cos(x)$, de modo que $u'(x) = -\sin(x)$. Neste caso, $f(u) = \dfrac{1}{u}$, e assim:

$$\int \tan(x)dx = \int -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx =$$
$$= \int -\frac{u'(x)}{u(x)}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos(x)| + c$$

Exemplo 5 *Calcular:*

$$\int \frac{dx}{(3x-5)^8}$$

Solução: Fazendo $u(x) = 3x - 5$, temos $u'(x) = 3$. Neste caso, $f(u) = \frac{1}{u^8}$, de modo que:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)^8} = \int \frac{\frac{1}{3} \cdot 3}{(3x-5)^8}dx = \frac{1}{3}\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-7}}{-7} + c = \frac{-1}{21 \cdot (3x-5)^7} + c$$

Exemplo 6 *Calcular:*

$$\int (x + \sec^2(3x))dx$$

Solução: Podemos escrever:

$$\int (x + \sec^2(3x))dx = \int x dx + \int \sec^2(3x)dx = \frac{x^2}{2} + \int \sec^2(3x)dx$$

Para resolver $\int \sec^2(3x)dx$, fazemos a substituição $u(x) = 3x$, de modo que $u'(x) = 3$. Temos, então, $f(u) = \sec^2(u)$, de modo que:

$$\int \sec^2(3x)dx = \frac{1}{3}\int \sec^2(3x) \cdot 3dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int \sec^2(u) \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \sec^2(u)du = \frac{1}{3}\tan(u) + c = \frac{1}{3}\tan(3x) + c.$$

Assim,

$$\int (x + \sec^2(3x))dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\tan(3x) + c$$

Exemplo 7 *Calcular:*

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx.$$

Solução: Aqui fazemos $u(x) = \ln(x)$, de modo que $u'(x) = \dfrac{1}{x}$. Neste caso, $f(u) = u$, de modo que:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x}dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln(x)^2}{2} + c$$

Exemplo 8 *Calcular:*

$$\int \frac{2x}{x^2 - 5}dx$$

Solução: Fazemos $u(x) = x^2 - 5$, de modo que $u'(x) = 2x$. Neste caso, $f(u) = \frac{1}{u}$, de modo que:

$$\int \frac{2x}{x^2 - 5}dx = \int \frac{2x}{x^2 - 5}dx = \int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|x^2 - 5| + c.$$

Observação 9 *Note que ao longo dos processos mostrados nos exemplos acima, substituímos a* ***expressão simbólica*** *$u'(x)dx$ pela* ***expressão simbólica*** *du. Este processo "mecânico" justificará as nomenclaturas utilizadas no procedimento da integração por partes.*

2 Método da Integração por Partes

Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo I. Temos, pela regra da derivação do produto:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

ou:

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x).$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = \int [f(x) \cdot g(x)]'dx - \int g(x) \cdot f'(x)dx$$

Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**, temos:

$$\int [f(x) \cdot g(x)]'dx = f(x) \cdot g(x) + c$$

e portanto:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx \tag{2}$$

Observamos que na expressão (9) deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c, que introduziremos no final do processo.

Na prática, costumamos fazer $u = f(x)$, de modo que costumamos denotar $du = f'(x)dx$ e $v = g(x)$, de modo que $dv = g'(x)dx$. Substituindo em (9), obtemos:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu + c$$

Exemplo 10 *Calcular* $\int x \cdot \cos(x)dx$.

Solução: Tomamos $u = x$ e $dv = \cos(x)dx$, de modo que $du = dx$ e $v = \sin(x)$. Usando a **Fórmula de Integração por Partes**, temos:

$$\int x \cdot \cos(x)dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

Exemplo 11 *Calcular* $\int \arctan(x)dx$.

Solução: Fazendo $u = \arctan(x)$ e $dv = dx$, temos $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ e $v = x$. Usando a **Fórmula de Integração por Partes**, temos:

$$\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Podemos resolver a integral $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ usando o **Método da Substituição**: fazemos $y = 1 + x^2$, de modo que $dy = 2xdx$. Assim,

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \ln|1+x^2| = \ln(1+x^2).$$

Assim,

$$\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C.$$

Exemplo 12 *Este exemplo mostra um caso em que precisamos aplicar o processo de integração por partes mais do que uma vez. Calcular:*

$$\int x^2 \cdot \sin(x)dx$$

Solução: Fazemos $u = x^2$ e $dv = \sin(x)dx$, de modo que $du = 2xdx$ e $v = -\cos(x)$. Usando a **Fórmula de Integração por Partes**, temos:

$$\int x^2 \cdot \sin(x)dx = -x^2 \cdot \cos(x) + 2\int x \cdot \cos(x)dx$$

Note que para resolver a integral $\int x \cdot \cos(x)dx$ precisamos fazer, novamente, a integração por partes – como fizemos no **Exemplo 10**. Assim, obtemos:

$$\int x^2 \cdot \sin(x)dx = -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) + C'$$

Exemplo 13 *Calcular* $\int e^x \sin(x)dx$.

Solução: Fazendo $dv = e^x \cdot dx$ e $u = \sin(x)$, de modo que $v = e^x$e $du = \cos(x)dx$, usando a **Fórmula de Integração por Partes**, obtemos:

$$\int e^x \cdot \sin(x)dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)dx$$

Agora precisamos resolver $\int e^x \cdot \cos(x)dx$. Fazemos $dv = e^x dx$ e $u = \cos(x)$, de modo que $v = e^x$ e $du = -\sin(x)dx$, e usando a **Fórmula de Integração por Partes**, temos:

$$\int e^x \cdot \cos(x)dx = e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot (-\sin(x))dx = e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \sin(x)dx$$

Assim,

$$\int e^x \cdot \sin(x)dx = e^x \cdot \sin(x) - \left(e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \sin(x)dx\right) =$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x)dx$$

Portanto:

$$2 \cdot \int e^x \cdot \sin(x)dx = e^x \cdot [\sin(x) - \cos(x)]$$

e:

$$\int e^x \cdot \sin(x)dx = \frac{e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x)}{2} + C$$

Exemplo 14 *Calcular:*

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cdot \cos(2x)dx$$

Solução: Fazemos $u = x^2 + 7x - 5$ e $dv = \cos(2x)dx$, de modo que $du = \dfrac{(2x+7)}{2}dx$ e $v = \dfrac{\sin(2x)}{2}$. Assim,

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cdot \cos(2x)dx = (x^2 + 7x - 5) \cdot \frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2} \cdot (2x+7)dx =$$

$$= \frac{(x^2 + 7x - 5)}{2} \cdot \sin(2x) - \int \frac{(2x+7)}{2} \cdot \sin(2x)dx$$

Agora aplicamos o processo de integração por partes à integral:

$$\int \frac{(2x+7)}{2} \cdot \sin(2x)dx$$

Fazemos $u = \dfrac{2x+7}{2}$ e $dv = \sin(2x)dx$, de modo que $du = dx$ e $v = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$, e usando a **Fórmula de Integração por Partes**, obtemos:

$$\int \frac{(2x+7)}{2} \cdot \sin(2x)dx = -\frac{(2x+7) \cdot \cos(2x)}{4} - \int \left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{(2x+7) \cdot \sin(2x)}{4} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = -\frac{(2x+7) \cdot \sin(2x)}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Assim,

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cdot \cos(2x)dx = \frac{(x^2 + 7x - 5)}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{(2x+7) \cdot \cos(2x)}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

2.1 Uma estratégia para integrar por partes

Ao integrar por partes uma integral da forma $\int f(x) \cdot g(x)dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções do termo $f(x) \cdot g(x)dx$ uma delas como sendo o fator u e a outra como sendo parte de uma diferencial dv.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x)dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x)dx$ (ou, ainda, $u = f(x) \cdot g(x)$ e $dv = 1 \cdot dx$). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos a seguir.

L	**I**	**A**	**T**	**E**
Logarítmicas	**I**nversas trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

No esquema acima, as letras da sigla **LIATE** são iniciais de diferentes tipos de funções. Uma estratégia que funciona bem é realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda na sigla;
- como formando a diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização se posiciona mais à direita na sigla.

Sumarizando, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de **L**, e dv pela letra mais próxima de **E**.

Exemplo 15 *Na integral* $\int x \cdot e^x dx$, $u = x$ *(**A**lgébrica) e* $dv = e^x dx$ *(**E**xponencial).*

3 Frações Racionais, Frações Racionais Parciais e Sua Integração

Conforme veremos, nem toda função elementar possui uma integral expressa em termos de funções elementares. Por esta razão, é muito importante separar as funções em duas classes: a das funções cujas integrais se expressam em termos das funções elementares e as que não se expressam em termos das funções elementares.

A mais simples das classes de funções cujas integrais se expressam em termos de funções elementares é a classe das funções racionais.

Toda função racional pode ser expressa como quociente entre dois polinômios:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 \cdot x^m + B_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + B_m}{A_0 \cdot x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + \cdots + A_n}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $Q(x)$ e $f(x)$ não têm raízes em comum.

Definição 16 *Seja* $r(x) = \dfrac{B_0 \cdot x^m + B_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + B_m}{A_0 \cdot x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + \cdots + A_n}$ *uma função racional. Se o grau do numerador, m, for* menor *que o grau do denominador, n, ($m < n$) a função racional é* ***própria***.

Definição 17 *Seja* $r(x) = \dfrac{B_0 \cdot x^m + B_1 \cdot x^{m-1} + \cdots + B_m}{A_0 \cdot x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + \cdots + A_n}$ *uma função racional.Se o grau do numerador, m, for* maior *que o grau do denominador, n, (n < m) a função racional é* ***imprópria***.

Exemplo 18 *A função racional dada por:*

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

é uma função racional imprópria. Dividindo o numerador pelo denominador, obtemos:

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1}$$

Uma vez que a integração de polinômios não representa nenhum obstáculo, a única "barreira" para calcular integrais funções racionais é a integração das chamadas *frações racionais próprias*.

Definição 19 *Uma* ***fração parcial*** *é uma função racional própria de uma das seguintes formas:*

(I) $\dfrac{A}{x - x_0}$

(II) $\dfrac{A}{(x - x_0)^k}$*, onde k é um número natural maior ou igual a* 2*;*

(III) $\dfrac{A \cdot x + B}{x^2 + p \cdot x + q}$*, onde as raízes do denominador são complexas (ou seja,* $p^2 - 4q < 0$*);*

(IV) $\dfrac{A \cdot x + B}{(x^2 + p \cdot x + q)^k}$*, onde k é um número natural maior ou igual a* 2 *e as raízes do denominador são complexas (ou seja,* $p^2 - 4q < 0$*);*

Na próxima seção provaremos que toda fração racional pode ser representada como uma soma de frações parciais dos tipos (I), (II), (III) e (IV).

A integração de frações parciais dos tipos (I), (II) e (III) não apresenta dificuldades especiais.

Tem-se:

(I) $\displaystyle\int \frac{A}{x - x_0} dx = A \cdot \ln|x - x_0| + C;$

(II) $\displaystyle\int \frac{A}{(x - x_0)^k} dx = A \cdot \int (x - x_0)^{-k} dx = A \cdot \frac{(x - x_0)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k) \cdot (x - x_0)^{k-1}} + C$

(III) $\displaystyle\int \frac{A\cdot x+B}{x^2+p\cdot x+q}dx = \frac{\frac{A}{2}\cdot(2x+p)+\left(B-\frac{A}{2}\cdot p\right)}{x^2+p\cdot x+q}dx = \frac{A}{2}\int\frac{2\cdot x+p}{x^2+p\cdot x+q}dx +$

$$+\left(B-\frac{A}{2}\cdot p\right)\int\frac{dx}{x^2+p\cdot x+q} = \frac{A}{2}\cdot\ln|x^2+p\cdot x+q|+$$

$$+\left(B-\frac{A}{2}\cdot p\right)\cdot\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\ln|x^2+p\cdot x+q| + \frac{2\cdot B-A\cdot p}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2\cdot x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+C$$

(IV) A integração de frações parciais do tipo (IV) requer cálculos mais sofisticados, como veremos a seguir.

Dada uma integral da forma:

$$\int\frac{A\cdot x+B}{(x^2+p\cdot x+q)^k}dx$$

fazemos as transformações:

$$\int\frac{A\cdot x+B}{(x^2+p\cdot x+q)^k}dx = \frac{\frac{A}{2}\cdot(2\cdot x+p)+\left(B-\frac{A}{2}\cdot p\right)}{(x^2+p\cdot x+q)^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int\frac{2\cdot x+p}{(x^2+p\cdot x+q)^k}dx + \left(B-\frac{A}{2}\cdot p\right)\cdot\int\frac{dx}{(x^2+p\cdot x+q)^k}.$$

Na primeira integral do segundo membro fazemos a substituição $t = x^2+p\cdot x+q$, de modo que $dt = (2\cdot x+p)dx$, e obtemos:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+p\cdot x+q)^k}dx = \int\frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k}+C = \frac{1}{(1-k)\cdot(x^2+p\cdot x+q)^{k-1}}+C$$

Seja, agora,

$$I_k = \int\frac{dx}{(x^2+p\cdot x+q)^k} = \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^2\right]^k} = \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$$

onde fizemos $t = x+\frac{p}{2}$, $q-\frac{p^2}{4} = m^2$ e obtivemos $dx = dt$. Observe que estamos assumindo que as raízes do denominador são complexas, e portanto que $q-\frac{p^2}{4} > 0$. Prosseguimos como segue:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt =$$
$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt \quad (3)$$

Fato:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{2\cdot(k-1)\cdot(t^2+m^2)^{k-1}}\right) = \frac{-1}{2\cdot(k-1)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right) = \frac{t}{(t^2+m^2)^k}$$

Finalmente,

$$\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)}dt = \int \frac{t\cdot t}{(t^2+m^2)^k}dt = \int t\cdot\frac{t}{(t^2+m^2)^k}dt =$$
$$= \int t\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{-1}{2\cdot(k-1)\cdot(t^2+m^2)^{k-1}}\right]dt = -\frac{1}{2\cdot(k-1)}\int t\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right)dt$$

Integrando por partes, tomando $u = t$ e $dv = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]$, de modo que:

$$du = dt \;\text{ e }\; v = \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}},$$

obtemos:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt = -\frac{1}{2\cdot(k-1)}\cdot\left[t\cdot\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]$$

Substituindo esta expressão em (3), obtemos:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{2\cdot(k-1)}\cdot\left[t\cdot\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$
$$= \frac{t}{2\cdot m^2\cdot(k-1)\cdot(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2\cdot m^2\cdot(k-1)}\cdot\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

O último membro das igualdades acima contém uma integral do mesmo tipo que I_k, mas cujo expoente é $k-1$; Desta forma, expressamos I_k em termos de I_{k-1}:

$$I_k = \frac{t}{2\cdot m^2\cdot(k-1)\cdot(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2\cdot m^2\cdot(k-1)}\cdot I_{k-1}$$

Prosseguindo com este processo, chegaremos à integral:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \cdot \arctan\left(\frac{t}{m}\right) + C.$$

Assim, substituindo t por $x + \frac{p}{2}$ e m por $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ na expressão acima, obtemos a expressão da integral do tipo (IV) em termos de A, B, p e q.

Exemplo 20 *Calcular:*

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$$

Solução: Seguimos o que foi feito na descrição acima:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{\frac{1}{2}\cdot(2\cdot x+2) + (-1-1)}{(x^2+2\cdot x+3)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2\cdot x+2)}{(x^2+2\cdot x+3)^2} dx -$$
$$- 2\cdot \int \frac{dx}{(x^2+2\cdot x+3)^2} = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{(x^2+2\cdot x+3)} - 2\cdot \int \frac{dx}{(x^2+2\cdot x+3)^2}$$

Agora fazemos uma substituição na última integral acima: $x + 1 = t$, de modo que $dx = dt$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2\cdot x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt$$

Consideremos a integral:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt$$

Observamos que:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \int t \cdot \frac{t}{(t^2+2)^2} dt$$

e que:

$$\frac{t}{(t^2+2)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{2\cdot(t^2+2)}\right)$$

de modo que podemos escrever:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt = \int t \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{2\cdot(t^2+2)}\right)dt$$

Fazendo $u = t$ e $dv = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{-1}{2\cdot(t^2+2)}\right)$, segue que $du = dt$, $v = \dfrac{-1}{2\cdot(t^2+2)}$ e que:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{-t}{2\cdot(t^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{-t}{2\cdot(t^2+2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Consequentemente, trocando t por $x+1$ obtemos:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2\cdot x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left[-\frac{x-1}{(x^2+2\cdot x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Finalmente, temos:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2\cdot x+3)^2}dx = -\frac{x+2}{2\cdot(x^2+2\cdot x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

3.1 Decomposição de uma Fração Racional em Frações Parciais

Mostraremos agora que toda fração racional própria pode ser decomposta como uma soma de frações parciais. Suponha que tenhamos uma fração racional própria:

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

Vamos assumir que os coeficientes dos polinômios são números reais e que a fração dada não seja irredutível (isto significa que o numerador e o denominador não têm raízes comuns).

Teorema 21 *Seja $x = x_0$ uma raiz do denominador, de multiplicidade k, ou seja, $f(x) = (x-x_0)^k \cdot f_1(x)$, onde $f_1(x_0) \neq 0$. Então a fração própria:*

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

pode ser representada como uma soma de duas outras frações próprias, como segue:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-x_0)^{k-1}\cdot f_1(x)}, \tag{4}$$

onde A é uma constante não-nula e $F_1(x)$ é um polinômio cujo grau é menor do que o grau de $(x-x_0)^{k-1}\cdot f_1(x)$.

Vamos escrever a identidade:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{F(x) - A \cdot f_1(x)}{(x-x_0)^k \cdot f_1(x)}, \tag{5}$$

que é verdadeira para qualquer constante A, e vamos escolher A de modo que o polinômio $F(x) - A \cdot f_1(x)$ seja divisível por $(x - x_0)$. Para isto, pelo **Teorema do Resto**, é necessário e suficiente que:

$$F(x_0) - A \cdot f_1(x_0) = 0.$$

Uma vez que $f_1(x_0) \neq 0, F(x_0) \neq 0$, A fica univocamente determinada por:

$$A = \frac{F(x_0)}{f_1(x_0)}.$$

Para este A, devemos ter:

$$F(x) - A \cdot f_1(x) = (x - x_0) \cdot F_1(x),$$

onde $F_1(x)$ é um polinômio de grau menor do que $(x - x_0)^{k-1} \cdot f_1(x)$. Assim,

$$F_1(x) = F(x) - \frac{F(x_0)}{f(x_0)} \cdot f_1(x)$$

Cancelando $(x - x_0)$ na fração (5), obtemos (4).

Corolário 22 *Um raciocínio similar pode ser aplicado à fração racional própria:*

$$\frac{F_1(x)}{(x-x_0)^{k-1} f_1(x)}$$

na equação (4). *Assim, se o denominador tem uma raiz $x = x_0$ de multiplicidade k, podemos escrever:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{A_1}{(x-x_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{x-x_0} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

onde $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ é uma fração própria irredutível.

Basta aplicar o teorema anterior, contanto que f_1 tenha outras raízes reais.

Consideraremos agora o caso em que o denominador contém raízes complexas. Recorde que as raízes complexas de um polinômio de coeficientes reais são sempre conjugadas aos pares.

Quando decompomos um polinômio em fatores reais, a cada par de raízes complexas conjugadas corresponde uma expressão da forma $x^2 + px + q$. Se as raízes complexas, no entanto, são de multiplicidade μ, elas correspondem a um fator da forma $(x^2 + px + q)^\mu$.

Teorema 23 *Se $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \cdot \varphi_1(x)$, onde o polinômio $\varphi_1(x)$ não é divisível por $x^2 + px + q$, então a fração $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ pode ser representada como segue:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M \cdot x + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \cdot \varphi_1(x)}, \tag{6}$$

onde $\Phi_1(x)$ é um polinômio de grau menor do que o polinômio $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \cdot \varphi_1(x)$.

Escrevemos a identidade:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \cdot \varphi_1(x)} = \frac{M \cdot x + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{F(x) - (M \cdot x + N) \cdot \varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \cdot \varphi_1(x)}, \tag{7}$$

que é verdadeira para quaisquer $M, N \in \mathbb{R}$. Vamos tomar M e N de modo que o polinômio $F(x) - (M \cdot x + N) \cdot \varphi_1(x)$ seja divisível por $x^2 + px + q$. A fim de fazer isto, é necessário e suficiente que a equação:

$$F(x) - (M \cdot x + N) \cdot \varphi_1(x) = 0$$

tenha as mesmas raízes $\alpha \pm i \cdot \beta$ que o polinômio $x^2 + px + q$. Assim,

$$F(\alpha + i \cdot \beta) - [M \cdot (\alpha + i \cdot \beta) + N] \cdot \varphi_1(\alpha + i \cdot \beta) = 0,$$

ou seja,

$$M(\alpha + i \cdot \beta) + N = \frac{F(\alpha + i \cdot \beta)}{\varphi_1(\alpha + i \cdot \beta)}.$$

Mas $\dfrac{F(\alpha + i \cdot \beta)}{\varphi_1(\alpha + i \cdot \beta)}$ é um número complexo, que pode ser escrito na forma $K + i \cdot L$, para certos $K, L \in \mathbb{R}$. Assim,

$$M \cdot (\alpha + i \cdot \beta) + N = K + i \cdot L$$

e assim:

$$M \cdot \alpha + N = K \ \text{ e } \ M \cdot \beta = L$$

ou seja:

$$M = \frac{L}{\beta} \ \text{ e } \ N = \frac{K \cdot \beta - L \cdot \alpha}{\beta}$$

Para estes M e N, o polinômio $F(x) - (M \cdot x + N) \cdot \varphi_1(x)$ tem o número $\alpha + i \cdot \beta$ como raiz, e portanto também o número $\alpha - i \cdot \beta$. Deste modo, o polinômio pode ser dividido, sem resto, pelas diferenças $[x - (\alpha + i \cdot \beta)]$ e $[x - (\alpha - i \cdot \beta)]$ e, portanto, pelo seu produto, que é $x^2 + px + q$:

$$F(x) - (M \cdot x + N) \cdot \varphi_1(x) = \Phi_1(x) \cdot (x^2 + px + q)$$

Assim,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu} \cdot \varphi_1(x)} = \frac{M \cdot x + N}{(x^2 + px + q)^{\mu}} + \frac{F(x) - (M \cdot x + N) \cdot \varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu} \cdot \varphi_1(x)} =$$
$$= \frac{M \cdot x + N}{(x^2 + px + q)^{\mu}} + \frac{\Phi_1(x) \cdot (x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^{\mu} \cdot \varphi_1(x)} = \frac{M \cdot x + N}{(x^2 + px + q)^{\mu}} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu - 1} \cdot \varphi_1(x)}$$

Aplicando os **Teoremas 21** e **23** à fração própria $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, podemos obter sucessivamente todas as frações parciais correspondentes a todas as raízes do denominador $f(x)$. Assim, do exposto acima segue o seguinte resultado:

Se:

$$f(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \cdot (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \cdot \\ \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{\mu_2} \cdots (x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{\mu_\ell}$$

então a fração $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ pode ser representada como segue:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_{\alpha_0}}{(x - x_0)^{\alpha_0}} + \frac{A_{\alpha_0 - 1}}{(x - x_0)^{\alpha_0 - 1}} + \cdots + \frac{A_1^0}{(x - x_0)} + \\ & + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{\alpha_1 - 1}}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}} + \cdots + \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \cdots + \\ & + \frac{A_{\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \frac{A_{\alpha_k - 1}}{(x - x_k)^{\alpha_k - 1}} + \cdots + \frac{A_1^k}{(x - x_0)} + \\ & + \frac{M_{\mu_1} \cdot x + N_{\mu_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1}} + \frac{M_{\mu_1 - 1} \cdot x + N_{\mu_1 - 1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1 - 1}} + \cdots + \frac{M_{\mu_1}^1 \cdot x + N_{\mu_1}^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \cdots + \\ & + \frac{M_{\mu_2} \cdot x + N_{\mu_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{\mu_2}} + \frac{M_{\mu_2 - 1} \cdot x + N_{\mu_2 - 1}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{\mu_2 - 1}} + \cdots + \frac{M_{\mu_2}^1 \cdot x + N_{\mu_2}^1}{(x^2 + p_2 x + q_2)} + \cdots + \\ & \frac{M_{\mu_\ell} \cdot x + N_{\mu_\ell}}{(x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{\mu_\ell}} + \frac{M_{\mu_\ell - 1} \cdot x + N_{\mu_\ell - 1}}{(x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{\mu_\ell - 1}} + \cdots + \frac{M_{\mu_\ell}^1 \cdot x + N_{\mu_\ell}^1}{(x^2 + p_\ell x + q_\ell)}\end{aligned}$$

Os coeficientes $A_{\alpha_0}, \cdots, A_1^0, \cdots, A_{\alpha_k}, \cdots, A_1^k, \cdots, M_{\mu_\ell}^1, N_{\mu_\ell}^1$ podem ser determinados pelo seguinte processo: a igualdade acima é uma identidade, de modo que reduzindo as frações a um denominador comum, obtemos polinômios idênticos nos numeradores dos membros direito e esquerdo da igualdade. Igualando os coeficientes de mesmos graus de x, obtemos um sistema de equações, do qual extraímos os valores dos coeficientes. Assim, *toda* fração racional própria pode ser decomposta como uma soma de frações racionais parciais.

Veremos, em seguida, alguns exemplos.

Exemplo 24 *Decompor a fração:*

$$\frac{x^2 + 2}{(x + 1)^3 \cdot (x - 2)}$$

como soma de frações parciais.

Solução: Sabemos, dos resultados provados, que existem constantes B, A_1, A_2 e A_3 tais que:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3\cdot(x-2)} = \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{B}{x-2} \tag{8}$$

o que implica a igualdade:

$$x^2+2 = A_1\cdot(x+1)\cdot(x-2) + A_2\cdot(x+1)^2\cdot(x-2) + A_3\cdot(x-2) + B\cdot(x+1)^3 \tag{9}$$

que equivale a:

$$\begin{aligned} x^2+2 = (A_1+B)\cdot x^3 + (A_2+3\cdot B)x^2 + (A_3 - A_2 - 3\cdot A_1 + 3\cdot B)\cdot x + \\ + (-2\cdot A_3 - 2\cdot A_2 - 2\cdot A_1 + B) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de x^3, x^2, x e o termo constante dos dois membros, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ A_2 + 3\cdot B = 1 \\ A_3 - A_2 - 3\cdot A_1 + 3\cdot B = 0 \\ -2\cdot A_3 - 2\cdot A_2 - 2\cdot A_1 + B = 2 \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, encontramos:

$$A_3 = -1, A_2 = \frac{1}{3}, A_1 = -\frac{2}{9} \text{ e } B = \frac{2}{9}$$

Logo, temos a decomposição:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3\cdot(x-2)} = \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3\cdot(x+1)^2} - \frac{2}{9\cdot(x+1)} + \frac{2}{9\cdot(x-2)}$$

Exemplo 25 *Decompor a fração:*

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2}$$

como uma soma de frações parciais.

Solução: Dos resultados provados, sabemos que devem existir $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

o que implica na igualdade:

$$x = A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-1) \cdot (x+1) + C \cdot (x-1)$$

$$x = (A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C),$$

que nos leva, igualando os coeficientes, ao sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é:

$$A = \frac{1}{4}, \ \ B = -\frac{1}{4} \ \text{ e } \ C = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2} = \frac{1}{4\cdot(x-1)} - \frac{1}{4\cdot(x+1)} + \frac{1}{2\cdot(x+1)^2}$$

Exemplo 26 *Decompor a fração:*

$$\frac{x}{x^2+4x-5}$$

como uma soma de frações parciais.

Solução: Primeiramente devemos fatorar o denominador. Para isto, procuramos suas raízes, mediante a fórmula quadrática:

$$x^2+4x-5=0$$
$$\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 36$$
$$x_1 = 1 \ \text{ e } \ x_2 = -5$$

Assim,

$$x^2+4x-5 = (x-1)\cdot(x+5)$$

Devemos, portanto, decompor:

$$\frac{x}{x^2+4x-5} = \frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)}$$

em frações parciais. Sabemos, assim, que existem A, B tais que:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$$

o que nos leva à igualdade:

$$x = (A+B)x + (5A-B)$$

Igualando os coeficientes, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 5A-B=0 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{1}{6}$ e $B = \frac{5}{6}$. Assim,

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)} = \frac{1}{6\cdot(x-1)} + \frac{5}{6\cdot(x+5)}$$

Exemplo 27 *Decompor:*

$$\frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)}$$

como uma soma de frações parciais.

Solução: Sabemos que existem A, B, C tais que:

$$\frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

o que nos leva à igualdade:

$$x^2 - 1 = (A+B)x^2 + (C-2B)x - 2C$$

Igualando os coeficientes, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C-2B=0 \\ 2C=1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{1}{4}$ e $C = \frac{1}{2}$. Assim,

$$\frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)} = \frac{3}{4\cdot(x-2)} + \frac{1}{4\cdot x} + \frac{1}{2\cdot x^2}$$

4 Integração de Frações Racionais

Considere o problema de resolver:

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}dx$$

Se a fração dada for *imprópria*, podemos representá-la como a soma de um polinômio e uma fração racional $\dfrac{F(x)}{f(x)}$. Podemos representar esta fração como uma soma de *frações parciais*, de modo que o problema de integração se reduzirá à integração de um polinômio e de várias frações parciais.

Exemplo 28 *Calcular:*

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3 \cdot (x-2)}dx$$

Solução: Pelo **Exemplo 24**, temos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3 \cdot (x-2)} = \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3 \cdot (x+1)^2} - \frac{2}{9 \cdot (x+1)} + \frac{2}{9 \cdot (x-2)}$$

de modo que:

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3 \cdot (x-2)}dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \cdot \int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{2}{9} \cdot \int \frac{dx}{(x-2)}$$

Como:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3} = -\frac{1}{2 \cdot (x+1)^2} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C_2$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_3$$

e:

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| + C_4,$$

segue que:

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3 \cdot (x-2)}dx = \frac{1}{2 \cdot (x+1)^2} - \frac{1}{3 \cdot (x+1)} - \frac{2}{9} \cdot \ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + C$$

Exemplo 29 *Calcular:*
$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2}dx$$

Solução: Pelo **Exemplo 25**, temos:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2} = \frac{1}{4\cdot(x-1)} - \frac{1}{4\cdot(x+1)} + \frac{1}{2\cdot(x+1)^2}$$

de modo que:

$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)}dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Como:

$$\int \frac{dx}{(x-1)} = \ln|x-1| + C_1$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + C_2$$

e:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_3$$

segue que:

$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2\cdot(x+1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$$

ou ainda:

$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)^2}dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2\cdot(x+1)} + C$$

Exemplo 30 *Calcular:*
$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)}dx$$

Solução: Pelo **Exemplo 26**, temos:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)} = \frac{1}{6\cdot(x-1)} + \frac{5}{6\cdot(x+5)}$$

de modo que:

$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-1)}dx + \frac{5}{6}\int \frac{1}{(x+5)}dx$$

Como:

$$\int \frac{1}{x-1} = \ln|x-1| + C_1$$

e:

$$\int \frac{1}{x+5}dx = \ln|x+5| + C_2$$

segue que:

$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+5)}dx = \frac{1}{6}\cdot\ln|x-1| + \frac{5}{6}\cdot\ln|x+5| + C$$

Exemplo 31 *Calcular:*

$$\int \frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)}dx$$

Solução: Pelo **Exemplo 27**, temos:

$$\frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)} = \frac{3}{4\cdot(x-2)} + \frac{1}{4\cdot x} + \frac{1}{2\cdot x^2}$$

de modo que:

$$\int \frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)}dx = \frac{3}{4}\cdot\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x^2}dx$$

Como:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-2| + C_1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$$

e:

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_3$$

segue que:

$$\int \frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-2)}dx = \frac{3}{4}\cdot\ln|x-2| + \frac{1}{4}\cdot\ln|x| - \frac{1}{2x} + C$$

Agora analisaremos um caso em que o denominador é um trinômio quadrático irredutível, ou seja, um trinômio da forma:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

onde $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$

Exemplo 32 *Calcular:*

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

Solução: Neste caso temos $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 25 = -9 < 0$, de modo que este trinômio é irredutível. Escrevemos:

$$x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

de modo que:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 6} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1}$$

Fazemos a substituição $y = x + 2$, de modo que $y'(x) = 1$ e, pelo **Teorema da Mudança de Variável** temos:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \int \frac{1 \cdot dx}{(x+2)^2 + 1} = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \arctan(y) + C = \arctan(x + 2) + C$$

Exemplo 33 *Calcular:*

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Solução: Primeiro vamos escrever o denominador como uma soma de quadrados:

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

de modo que:

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 + 1}$$

Fazemos a substituição $u = x + 1$, de modo que $x = u - 1$ e $u'(x) = 1$ e, portanto:

$$\int \frac{2x + 1}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{2 \cdot (u - 1) + 1}{1 + u^2} du = 2 \int \frac{2u}{u^2 + 1} du + \int \frac{-1}{1 + u^2} du = \ln(1 + u^2) - \arctan(u) + C$$

Finalmente, retornamos à variável x:

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx = \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C$$

5 Integração de Certas Classes de Funções Trigonométricas

Nesta seção consideraremos integrais da forma:

$$\int R(\sin(x), \cos(x))dx \tag{10}$$

onde R é uma função racional de duas variáveis, ou seja, uma função da forma:

$$R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

onde $p(x,y)$ e $q(x,y)$ são polinômios em duas variáveis.

Mostraremos que uma integral da forma (10), mediante uma substituição da forma:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \tag{11}$$

sempre se reduz a uma integral de uma função racional.

O primeiro passo é expressar $\sin(x)$ e $\cos(x)$ em termos de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, ou seja, em termos de u:

$$\sin(x) = \frac{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Note que como $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, vale:

$$x = 2\cdot\arctan(u) \;\text{ e }\; dx = \frac{2\cdot du}{1+u^2}$$

Desta forma, $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são expressos como funções racionais de u. Como uma função racional de funções racionais é racionaal, obtemos uma integral de uma função racional:

$$\int R(\sin(x),\cos(x))dx = \int R\left[\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right]\cdot\frac{2}{1-u^2}du$$

Exemplo 34 *Calcular:*

$$\int \sec(\theta) d\theta$$

Solução: Neste caso, o integrado é uma função racional de $\cos(\theta)$, a saber:

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Temos, fazendo $u = \tan(\frac{x}{2})$, que:

$$\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

e portanto:

$$\sec(\theta) = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Consequentemente $du = \dfrac{1}{2}\sec^2(\frac{x}{2})dx = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2(\frac{x}{2})\right)dx = \dfrac{(1+u^2)}{2}dx$, ou seja,

$$\frac{2}{1+u^2}du = dx$$

Deste modo:

$$\int \sec(\theta) d\theta = \int \underbrace{\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)}_{=\sec(\theta)} \cdot \overbrace{\frac{2}{1+u^2}du}^{=dx} = \int \frac{2}{1-u^2}du$$

Decompondo $2/(1-u^2)$ em frações parciais, obtemos:

$$\frac{2}{1-u^2} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}$$

Assim,

$$\int \frac{2}{1-u^2}du = \int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{1+u}$$

$$\int \frac{2}{1-u^2}du = \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$$

Voltando à variável original, segue que:

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})} = \frac{1+\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1-\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}} = \frac{\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}))$, obtemos:

$$\frac{\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})} \cdot \frac{(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}))}{(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}))} = \frac{(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}))^2}{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{\cos^2(\frac{x}{2})+2\cdot\cos(\frac{x}{2})\cdot\sin(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1+2\cdot\cos(\frac{x}{2})\cdot\sin(\frac{x}{2})}{\cos(x)} = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$$

Logo,

$$\int \sec(\theta)d\theta = \ln\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right| + C = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C$$

6 Integrais de Produtos de Potências de Funções Trigonométricas

Certas funções trigonométricas podem ser integradas sistematicamente. Esse é o caso das funções que são produtos de potências inteiras das seis funções trigonométricas básicas, como:

$$\sin^3(x)\cdot\tan^{-5}(x),\ \cot^{-7}(x)\cdot\sec^3(x)\ \text{ etc}$$

Observemos que tais funções podem sempre ser expressas na forma:

$$\sin^m(x)\cdot\cos^n(x)$$

onde m e n são números inteiros. Por exemplo,

$$\sin^3(x)\cdot\tan^{-5}(x) = \sin^3(x)\cdot\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^{-5} = \sin^{-2}(x)\cdot\cos^5(x);$$

$$\cot^{-7}(x)\cdot\sec^3(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^3 = \sin^7(x)\cdot\cos^{-10}(x)$$

Distinguiremos três casos na integração dessas funções.

6.1 Integral de $\cos^m(x) \cdot \sin^n(x)$, onde m e n são números pares não negativos

Neste caso, convém utilizarmos as fórmulas:

$$\begin{cases} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \end{cases}$$

Somando e subtraindo membro a membro dessas identidades, obtemos as **fórmulas de redução**:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Exemplo 35 *Calcular:*

$$\int \cos^2(x)dx$$

Solução: Usando a fórmula de redução de $\cos^2(x)$ temos:

$$\int \cos^2(x)dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C = \frac{x+\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} + C$$

Exemplo 36 *Calcular:*

$$\int \sin^2(x)dx$$

Solução: Usando a fórmula de redução de $\cos^2(x)$ temos:

$$\int \sin^2(x)dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C = \frac{x-\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} + C$$

Podemos aplicar as fórmulas de redução repetidamente, a fim de transformar qualquer função do tipo $\sin^m(x) \cdot \cos^n(x)$, onde m e n são números pares positivos, numa soma envolvendo apenas potências de cossenos. Por exemplo,

$$\cos^4(x) = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) =$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}$$

logo:

$$\int \cos^4(x)dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C$$

Do mesmo modo,

$$\sin^6(x) \cdot \cos^{10}(x) = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^5$$

e isto é uma soma de potências *positivas* de $\cos(2x)$, cada potência com um certo coeficiente numérico. Vemos, assim, quie para integrar produtos de potências pares positivas de $\sin(x)$ e $\cos(x)$, devemos saber integrar potências positivas de $\cos(x)$. Enquanto tal potência for par, usaremos a fórmula de redução para $\cos^2(x)$.

6.2 Integral de $\cos^m(x)$, onde m é um número ímpar

No caso de uma potência ímpar, bastará usar a a transformação $y = \sin(x)$:

$$\int \cos^{2n+1}(x)dx = \int (1-\sin^2(x))^n \cdot \cos(x)dx = \int (1-y^2)^n dy$$

Exemplo 37 *Calcular:*

$$\int \cos^7(x)dx$$

Solução: Fazemos $y = \sin(x)$, e obtemos:

$$\int \cos^7(x)dx = \int (1-\sin^2(x))^3 \cdot \cos(x)dx = \int (1-y^2)^3 dy = \int (1-3y^2+3y^4-y^6)dy =$$

$$y - y^3 + \frac{3y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + C = \sin(x) - \sin^3(x) + \frac{3\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C$$

6.3 Integral de $\cos^m(x) \cdot \sin^n(x)$, onde m ou n é ímpar (mas não ambos)

Neste caso, aplicamos as mesmas ideias das seções anteriores. Se $n = 2q+1$, fazemos $y = \sin(x)$ e obtemos:

$$\int \sin^m(x)\cos^{2q+1}(x)dx = \int y^m \cdot (1-y^2)^q dy$$

Se $m = 2p+1$, fazemos $y = \cos(x)$ e obtemos:

$$\int \sin^{2p+1}(x)\cos^n(x)dx = -\int y^n(1-y^2)^p dy$$

Note que as integrais em y nada mais são do que integrais de funções racionais em y.

Vejamos outro modo de se calcular a integral da função $\sec(x)$

Exemplo 38 *Calcular:*

$$\int \cos^2(x)\sin^3(x)dx$$

Solução: Neste caso, em que a potência do seno é ímpar, fazemos $y = \cos(x)$, e obtemos:

$$\int \cos^2(x)\sin^3(x)dx = \int \cos^2(x)\cdot(1-\cos^2(x))\cdot\sin(x)dx = -\int y^2\cdot(1-y^2)dy =$$
$$= -\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + C = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

Exemplo 39 *Calcular:*

$$\int \sec(x)dx$$

Solução: Temos:

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{1}{\cos(x)}dx = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}dxy = \sin(x)\frac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(|1+y| - |1-y|) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} + C = \ln\sqrt{\frac{(1+\sin(x))^2}{1-\sin^2(x)}} + C =$$
$$= \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{|\cos(x)|}\right) + C$$

Como para todo x temos $1+\sin(x) \geq 0$, temos:

$$\frac{1+\sin(x)}{|\cos(x)|} = \left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right| = |\sec(x)+\tan(x)|$$

e portanto:

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C$$

6.4 Integral de $\cos^m(x)\cdot\sin^n(x)$, onde m e n são pares, um deles negativo

Neste caso convém utilizarmos as fórmulas:

$$\begin{cases} 1+\tan^2(x) = \sec^2(x) \\ 1+\cos^2(x) = \csc^2(x) \end{cases}$$

Recordemos, também, que:

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ e } \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\csc^2(x)$$

Observamos agora que, como m e n são pares, podemos escrever:

$$\sin^m(x) \cdot \cos^n(x)dx = \sin^{-2p}(x) \cdot \cos^{-2q}(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}dx =$$

$$= (\csc^2(x))^p \cdot (\sec^2(x))^q \frac{d}{dx}(\tan(x))dx$$

Fazendo $y = \tan(x)$ – e portanto $y'(x) = \sec^2(x)$, de modo que $dy = \sec^2(x)dx$, obtemos:

$$\frac{(\csc^2(x))^p \cdot (\sec^2(x))^q}{\cos^2(x)}dx = \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^p \cdot (1+y^2)^p dy$$

Assim,

$$\int \sin^m(x) \cdot \cos^n(x)dx = \int \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^p \cdot (1+y^2)^p dy$$

e o resto da integração se faz por frações parciais.

Poderíamos, também, ter escrito:

$$\frac{\sin^{-2p}(x) \cdot \cos^{-2q}(x)}{\sin^2(x)}dx = -(\csc^2(x))^p \cdot (\sec^2(x))^q \cdot \frac{d}{dx}(\cot(x))dx$$

de modo que fazendo a mudança de variáveis $y = \cot(x)$, obtemos:

$$\int \frac{\sin^{-2p}(x) \cdot \cos^{-2q}(x)}{\sin^2(x)}dx = -\int (1+y^2)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^q dy$$

Exemplo 40 *Calcular:*

$$\int \tan^2(x)dx$$

Solução: Fazendo $y = \tan(x)$, tem-se:

$$\int \tan^2(x)dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(\tan(x))}{\csc^2(x)}dx = \int \frac{dy}{1+\frac{1}{y^2}} = \int \frac{y^2}{1+y^2}dy = \int \frac{(1+y^2)-1}{1+y^2}dy =$$

$$= y - \arctan(y) + C = \tan(x) - x + C.$$

6.5 Integral de $\cos^m(x) \cdot \sin^n(x)$, onde m ou n é ímpar e positivo (mas não ambos) e o outro é um número qualquer

Nestes casos, faz-se uma das seguintes substituições: $y = \cos(x)$ ou $y = \sin(x)$.

Exemplo 41 *Calcular:*

$$\int \sqrt[3]{\cos(x)} \cdot \sin^5(x) dx$$

Solução: aqui fazemos $y = \cos(x)$, de modo que:

$$\int \sqrt[3]{\cos(x)} \sin^5(x) dx = -\int \sqrt[3]{y} \cdot (1 - y^2) dy = -\int (y^{\frac{1}{3}} - 2y^{\frac{7}{3}} + y^{\frac{13}{3}}) dy =$$

$$= -\frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5} y^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{16} y^{\frac{16}{3}} = \frac{3}{5}(\cos(x))^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{4}(\cos(x))^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{16}(\cos(x))^{\frac{16}{3}}$$

7 Integrandos do Tipo $R(x, \sqrt{k \pm x^2})$ – Substituição Trigonométrica

Supomos, aqui, que $k \neq 0$, e que se $k < 0$ então x^2 leva o sinal positivo, de forma que podemos distinguir os três tipos de raízes com $k = \pm a^2, a > 0$:

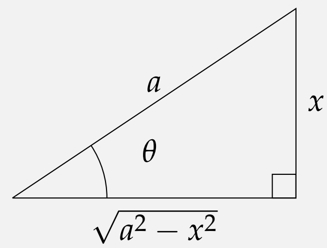
a) $\sqrt{a^2 - x^2}$

b) $\sqrt{x^2 - a^2}$

c) $\sqrt{a^2 + x^2}$

Cada uma das integrais correspondentes se reduz a uma integral que pode ser resolvida mediante substituições simples, sugeridas pelo **Teorema de Pitágoras**.

No caso **a)**, consideramos um triângulo retângulo com hipotenusa a e um cateto igual a x:



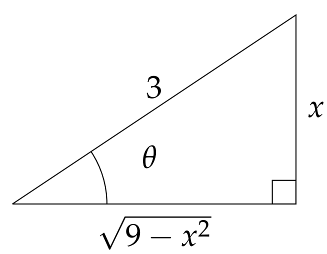
o que sugere a substituição:

$$\frac{x}{a} = \sin(\theta) \text{ ou } x = a \cdot \sin(\theta)$$

Exemplo 42 *Calcular:*

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx$$

Solução: Aqui temos um radical do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$ no integrando, de modo que convém considerarmos um triângulo retângulo com hipotenusa $a = 3$ e um cateto igual a x:



o que, como vimos, sugere a substituição:

$$x(\theta) = 3 \cdot \sin(\theta)$$

de modo que $dx = 3\cos(\theta)d\theta$. Assim,

$$\sqrt{9 - x^2} = 3\cos(\theta), \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3\cos(\theta)}{9\sin^2(\theta)} \cdot 3\cos(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int \cot^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int (\csc^2(\theta) - 1) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cot(\theta) - \theta) + C$$

Devemos, agora, escrever este resultado em termos da variável original, x – ou seja, devemos expressar θ e $\cot(\theta)$ em termos de x.

Sabemos que, se $x = 3 \cdot \sin(\theta)$,então $\theta - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Como sin é bijetora em $[-\pi/2, \pi/2]$ podemos, portanto, escrever θ em termos de x:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

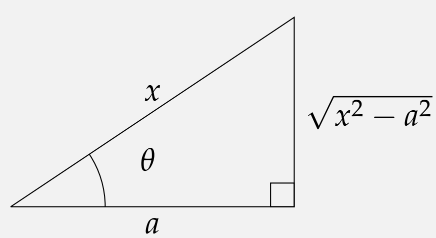
Com auxílio do triângulo acima, concluímos que:

$$\cot(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Substituindo no resultado obtido, segue que:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C$$

No caso **b)**, a hipotenusa deve ser igual a x e um dos catetos dado por a:



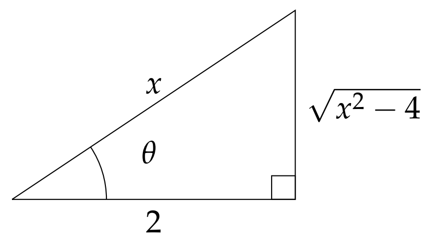
o que sugere a substituição:

$$\frac{a}{x} = \cos(\theta) \quad \text{ou} \quad x = a \cdot \sec(\theta)$$

Exemplo 43 *Calcular:*

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$$

Solução: Aqui temos um radical do tipo $\sqrt{x^2 - a^2}$ no integrando, de modo que convém considerarmos um triângulo retângulo em que 2 e x sejam ambos medidas de catetos:



Fazemos, portanto, a substituição $x(\theta) = 2 \cdot \sec(\theta)$. Desta forma, $dx = 2 \cdot \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$, e assim:

$$x = 2 \cdot \sec(\theta)$$

logo, $dx = 2\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$, de modo que:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{2 \cdot \sec(\theta)\sqrt{4\sec^2(\theta)-4}}d\theta =$$
$$= \int \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{4\sec^2(\theta)-4}}d\theta = \int \frac{\tan(\theta)}{2\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}d\theta =$$
$$= \int \frac{\tan(\theta)}{2\tan(\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta = \frac{\theta}{2} + C$$

Vamos, agora, expressar este resultado em termos da variável original x, ou seja, deveremos expressar θ em termos de x. Com auxílio do triângulo desenhado anteriormente, concluímos que:

$$\cos(\theta) = \frac{2}{x}$$

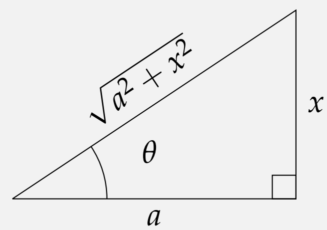
e portanto:

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{x}\right).$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C.$$

Finalmente, no caso **c)**, tanto x quanto a devem ser catetos:



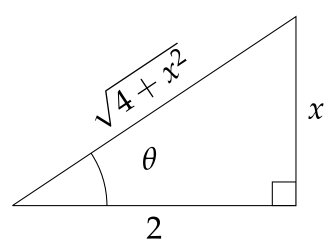
o que sugere a substituição:

$$\frac{x}{a} = \tan(\theta) \quad \text{ou} \quad x = a \cdot \tan(\theta).$$

Exemplo 44 *Calcular:*

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx$$

Solução: Aqui temos um radical do tipo $\sqrt{a^2+x^2}$ no integrando, de modo que convém considerarmos um triângulo retângulo em que 2 e x sejam ambos medidas de catetos:



Fazemos, portanto, a substituição $x(\theta) = 2 \cdot \tan(\theta)$. Desta forma, $dx = 2 \cdot \sec^2(\theta) d\theta$, e assim:

$$\sqrt{x^2+4} = 2 \cdot \sec(\theta) \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

logo,

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{4 \cdot \tan^2(\theta)}{2 \cdot \sec(\theta)} \cdot 2\sec^2(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \int \tan^2(\theta) \cdot \sec(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{4}{3} \int (\sec^2(\theta) - 1) \cdot \sec(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \int (\sec^3(\theta) - \sec(\theta)) d\theta =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta) - \frac{1}{2}\ln|\tan(\theta) + \sec(\theta)| + C\right)$$

Retornando à variável $x = 2\tan(\theta)$, observando o triângulo desenhado anteriormente, segue que:

$$\int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{6}\left(-4\ln\left(\frac{\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|}{2}\right) + x\sqrt{x^2+4}\right) + C$$

8 Integrais da forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Consideraremos integrais da forma:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{12}$$

Apresentaremos um método que nos permite transformar a integral acima em uma da forma:

$$\int \bar{R}(\sin(z), \cos(z))dz, \tag{13}$$

onde R é uma função racional de duas variáveis.

Primeiramente transformamos o trinômio:

$$ax^2+bx+c = a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Fazemos, em seguida, uma mudança de variável, fazendo:

$$x + \frac{b}{2a} = t,\ dx = dt$$

de modo que:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}$$

Os casos possíveis são:

1. $a > 0$ e $c - b^2/4a > 0$. Neste caso, fazemos $a = m^2$ e $c - b/2a = n^2$, de modo a podermos escrever:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2}$$

2. $a > 0$ e $c - b^2/4a < 0$. Neste caso, fazemos $a = m^2$ e $c - b^2/4a = -n^2$. Assim,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2t^2 - n^2}$$

3. $a < 0$ e $c - b^2/4a > 0$. Neste caso, fazemos $a = -m^2$ e $c - b^2/4a = n^2$. Assim,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2t^2}$$

4. $a < 0$ e $c - b^2/4a < 0$. Neste caso, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ é um número complexo para qualquer que seja o valor atribuído a x.

Desta forma, a integral (12) é defuzida a um dos seguintes tipos de integral:

(I) $\int R(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2})dt$

(II) $\int R(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2})dt$

(III) $\int R(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2})dt$

As integrais do tipo (I) são resolvidas mediante a substituição:

$$t = \frac{n}{m}\tan(z)$$

As integrais do tipo (II) são resolvidas mediante a substituição:

$$t = \frac{n}{m}\sec(z)$$

As integrais do tipo (III) são resolvidas mediante a substituição:

$$t = \frac{n}{m}\sin(z)$$

Exemplo 45 *Calcular:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

Solução: Sendo uma intergral do tipo (III), aplicamos uma substituição $x = a \cdot \sin(z)$, de modo que:

$$dx = a \cdot \cos(z)dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a\cdot\cos(z)dz}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2(z))^3}} = \int \frac{a\cdot\cos(z)dz}{a^3\cdot\cos^3(z)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2(z)} = \frac{1}{a^2}\cdot\tan(z)+C =$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin(z)}{\cos(z)}+C = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin(z)}{\sqrt{1-\sin^2(z)}}+C = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

9 Funções cujas Integrais Não Podem ser Expressas em Termos de Funções Elementares

Vimos que qualquer função contínua definida em um intervalo da forma $[a,b]$ admite uma primitiva: em outras palavras, sempre existe uma função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $F'(x)=f(x)$. No entanto, **nem toda primitiva**, mesmo que exista, pode ser expressa como em termos de funções elementares.

Recorde que uma função elementar na variável x é uma função que, num número finito de passos, pode ser construída através de funções algébricas, da função exponencial ou da função logarítmica aplicando operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e composição de funções. Um estudo detalhado das funções cujas integrais podem ser escritas em termos de funções elementares foi feito por Liouville. Remetemos o leitor interessado a [4].

Alguns exemplos de integrais que *não* podem ser expressas em termos de funções elementares são:

$$\int e^{x^2}dx,\ \int \frac{\sin(x)}{x}dx,\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2(x)}dx,\ \int \frac{dx}{\ln(x)},$$

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{e^x}{x}dx,\ \int e^{e^x}dx,\ \int \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx, \int \ln(\ln(x))dx$$

dentre muitas outras. Alguns exemplos, que não provaremos, de integrais não-elementares:

• se $g(x)$ é um polinômio de grau maior do que 1, então $\int e^{g(x)}dx$ *não* é uma função elementar;

• se $f(x)$ é um polinômio com grau maior ou igual a 1, então $\int \frac{e^x}{f(x)}dx$ *não* é uma função elementar

References

[1] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[2] Flemming, D.M. e Gonçalves, M. B., **Cálculo: Funções, limite, derivação e integração**, 6^a edição revista e ampliada. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Mamede, R., **Funções sem Primitiva Elementar**, disponível em https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnx3ZXNjbGV5Ym9ub21vfGd4OjY5M2QxZWU

[5] Spivak, M., **Cálculo en Variedaes**, Editorial Reverté S.A. Barcelona, 2017.