

MAT 2453 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1^o SEMESTRE DE 2025

AGENDA 05

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda introduzimos o conceito de continuidade de uma função em um ponto, bem como o de descontinuidade. Damos diversos exemplos de funções contínuas, utilizando-nos das propriedades aritméticas dos limites.

Apresentamos um resultado que nos garante a continuidade da composição de funções e técnicas de resolução de limites usando as noções introduzidas.

1 Continuidade de Funções

Informalmente, definimos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo contínua em um **ponto do seu domínio** quando satisfizer a propriedade abaixo:

“É possível controlar a distância de $f(x)$ a $f(x_0)$ simplesmente controlando a distância entre x e x_0 .”

Vamos tornar mais preciso o enunciado acima: a distância entre $f(x)$ e $f(x_0)$ é $|f(x) - f(x_0)|$, enquanto a distância entre x e x_0 é $|x - x_0|$. Reformulando a afirmação anterior, temos:

“É possível controlar $|f(x) - f(x_0)|$ simplesmente controlando a $|x - x_0|$.”

*jeancb@ime.usp.br

Mas o que significa, exatamente, “controlar $|f(x) - f(x_0)|$ ”? Significa que podemos *limitar superiormente* $|f(x) - f(x_0)|$ por *qualquer* número positivo. De modo, análogo, “controlar $|x - x_0|$ ” significa *limitar* $|x - x_0|$ por algum número positivo. Note, assim, que f será contínua em x_0 se para controlar a distância de $f(x)$ a $f(x_0)$ for *suficiente* limitarmos a distância de x a x_0 a um valor “pequeno o bastante”.

Nos termos acima, podemos re-enunciar a continuidade de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em $x_0 \in D$ como:

“É possível tornar a expressão $|f(x) - f(x_0)|$ limitada superiormente por um número *qualquer*, $\varepsilon > 0$ simplesmente tornando a expressão $|x - x_0|$ menor do que um certo número positivo, $\delta > 0$.”

Nestes termos, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto x_0 se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ (digamos uma “margem de erro para o resultado”), existir $\delta > 0$ (digamos, uma “margem de erro para o dado”) tal que, se x está no domínio de f e $|x - x_0| < \delta$, tenha-se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Em termos simbólicos, temos:

Definição 1 (continuidade “raiz”). Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D = \text{dom}(f)$. Dizemos que f é **contínua em** x_0 se, e somente se:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((x \in D) \& (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Observe, agora, o caso em que $x_0 \in D'$. Note que a sentença:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((x \in D) \& (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (1)$$

é muito similar àquela que usamos para expressar que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

qual seja:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((x \in D) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (2)$$

Note que, claramente, $(1) \Rightarrow (2)$, uma vez que se para todo x satisfazendo $|x - x_0| < \delta$ vale $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *a fortiori* para todo x satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$ (uma condição *mais exigente* que $|x - x_0| < \delta$, pois exclui a possibilidade de x ser igual a x_0) também tem-se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Perceba que, como estamos tratando de **continuidade**, o ponto x_0 *deve* pertencer ao domínio de f , ou seja, existe $f(x_0)$. Desta forma, se estiver satisfeita a sentença (2), teremos:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} (x \neq x_0) \& (|x - x_0| < \delta) \\ (x = x_0) \& (|x - x_0| < \delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta \xrightarrow{(2)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ x = x_0 \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon \end{cases}$$

ou seja, vale (1).

Logo, se $|x - x_0| < \delta$ tem-se, de um modo ($x \neq x_0$) ou de outro ($x = x_0$), $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

A argumentação acima nos permite descrever a continuidade de uma função como segue:

Definição 2 (continuidade “Nutella”). Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in A = \text{dom}(f)$. Dizemos que f é **contínua em** x_0 se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita:

(C1) x_0 é ponto isolado de D ;

(C2) Caso $x_0 \in D'$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Quando a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que “ f é contínua”.

Conforme vimos na agenda anterior, as seguintes funções são contínuas em qualquer ponto de seu domínio:

- a função constante, $f(x) = k$ (**Exemplo 2** da AGENDA 04);
- a função afim, $f(x) = a \cdot x + b$ (**Exemplo 3** da da AGENDA 04);
- a função $f(x) = \sin(x)$ (**Proposição 4** da AGENDA 05);
- a função $x \mapsto |x|$ (**Exemplo 10** combinado com o **Lema 5** da da AGENDA 04).

Definição 3 (função descontínua em um ponto). Dizemos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **descontínua em** $x_0 \in A$ se, e somente se x_0 for ponto de acumulação de A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ou se $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Exemplo 4 (função descontínua em um ponto). A função:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é contínua em 0, posto que:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

De fato, veja que os limites laterais são distintos:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Exemplo 5 (função descontínua em um ponto). Considere a função:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tal função é **descontínua** em 0, uma vez que o limite de $g(x)$ conforme x tende a x_0 não existe.

Exemplo 6 (função descontínua em todo o seu domínio). Considere a função:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tem-se, assim, por exemplo, $h(1) = h(1/2) = h(2/3) = 1$ e $h(\sqrt{2}) = h(\sqrt{3}) = h(\pi) = 0$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer. Mostraremos que h não é contínua em x_0 mostrando que:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

Isto se verifica devido ao fato de que, em qualquer vizinhança de x_0 , ou seja, para qualquer $\delta > 0$, existem sempre $x_i \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $x_r \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbb{Q}$.

Vamos construir duas sequências convergindo para x_0 , $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tais que $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n \in \mathbb{Q})$. Seguirá disto que:

$$a_n \rightarrow x_0 \text{ e } b_n \rightarrow x_0$$

e:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(h(a_n) = 0)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(h(b_n) = 1).$$

Construção de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Dado $n \in \mathbb{N}$, pelo **Teorema 20** do MATERIAL SUPLEMENTAR, existe um número irracional entre $x_0 - \frac{1}{n}$ e $x_0 + \frac{1}{n}$. Escolhemos um número irracional neste intervalo e o denotamos por a_n . Note que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, e teremos, para $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x_0 - \varepsilon < x_0 - \frac{1}{n} < a_n < x_0 + \frac{1}{n} < x_0 + \varepsilon$, o que mostra que $a_n \rightarrow x_0$.

Construção de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Dado $n \in \mathbb{N}$, pelo **Teorema 22** do MATERIAL SUPLEMENTAR, existe um número racional entre $x_0 - \frac{1}{n}$ e $x_0 + \frac{1}{n}$. Escolhemos um número racional neste intervalo e o denotamos por b_n . Note que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, e teremos, para $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x_0 - \varepsilon < x_0 - \frac{1}{n} < b_n < x_0 + \frac{1}{n} < x_0 + \varepsilon$, o que mostra que $b_n \rightarrow x_0$.

Pelo **Teorema 15** das NOTAS DA AGENDA 08, de 11 de setembro de 2020, segue que:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

Uma vez que $x_0 \in \mathbb{R}$ é qualquer, a função é descontínua **em todo** seu domínio.

2 Propriedades das Funções Contínuas

Convém enunciarmos propriedades fundamentais das funções contínuas, como o seu fechamento sob as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

O teorema a seguir é uma consequência imediata da definição de continuidade em um ponto e das propriedades aritméticas dos limites:

Teorema 7. *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in A \cap A'$. Então:*

- (I) $f + g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 ;
- (II) $f - g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 ;
- (III) $f \cdot g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 ;
- (IV) Se $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g} : A \setminus g^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 ;

Demonstração. Ad (I): Como f e g são contínuas em x_0 , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como o limite da soma é a soma dos limites, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0).$$

Ad (II): Como f e g são contínuas em x_0 , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como o limite da diferença é a diferença dos limites, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) - g(x_0) = (f - g)(x_0).$$

Ad (III): Como f e g são contínuas em x_0 , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como o limite do produto é o produto dos limites, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0).$$

Ad (IV): Como f e g são contínuas em x_0 , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como $g(x_0) \neq 0$ e, nesta condição, o limite do quociente é o quociente dos limites, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g} \right) (x_0).$$

□

Observação 8. É falso que a soma de suas funções, $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descontínuas em $x_0 \in A \cap A'$ seja descontínua em x_0 . Considere as funções:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1, & \text{se } x \geq 0 \\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ambas descontínuas em $x_0 = 0$. No entanto, a soma destas duas funções, $g + h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é a função constante igual a zero, que é contínua em $x_0 = 0$.

Teorema 9 (Teorema da Conservação do Sinal). Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in A'$. Se $f(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0).$$

Outrossim, se $f(x_0) < 0$, então existe $\eta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in A)(|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < 0)$$

Demonstração. De fato, uma vez que $f(x_0) > 0$ e f é contínua em $x_0 \in A'$, dado $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}),$$

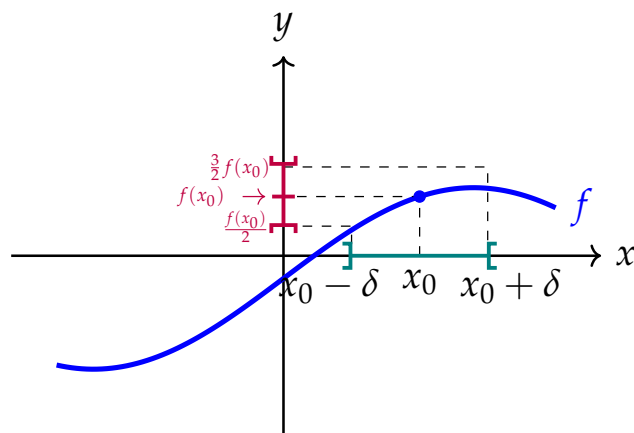
ou seja,

$$\begin{aligned} -\frac{f(x_0)}{2} &< f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \iff \\ 0 &< \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \end{aligned}$$

Assim, se $x \in A$ é tal que $|x - x_0| < \delta$ então:

$$0 < f(x).$$

O outro caso é análogo. □



2.1 Exemplos de Funções Contínuas

Nesta subseção apresentamos diversos exemplos de funções contínuas.

Definição 10 (função polinomial). Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma *função polinomial de grau n* é uma função da forma:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, \end{aligned}$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são tais que $a_n \neq 0$.

Exemplo 11 (continuidade da função $f(x) = 2 \cdot x + 3$ no ponto $x_0 = 1$). Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que vale a seguinte implicação:

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| = |2 \cdot x + 3 - (2 \cdot 1 + 3)| = |2 \cdot x + 3 - 5| < \varepsilon$$

Vamos buscar uma condição suficiente envolvendo o termo $|x - x_0| = |x - 1|$ para que tenhamos $|2 \cdot x - 2| < \varepsilon$. Temos:

$$|2 \cdot x - 2| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |2| \cdot |x - 1| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Deste modo, se tomarmos $\delta = \varepsilon/2$, teremos a implicação:

$$|x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2 \cdot x - 2| < \varepsilon$$

Assim, f é contínua em $x_0 = 1$, pois dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/2 > 0$ tal que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

Para alguns valores de ε entre 0 e 3, veja <https://www.geogebra.org/m/fdspkk3c>.

Exemplo 12 (continuidade da função polinomial). Toda função polinomial é contínua em qualquer ponto de seu domínio.

Com efeito, segue do **Teorema 7** que, como a função $f(x) = 1 \cdot x + 0$ é contínua e as funções constantes iguais a $a_0, \dots, a_n$ são contínuas, pelo item (III) segue que $f^2(x) = x \cdot x = x^2, \dots, f^n(x) = x^n$ são funções contínuas em todo o seu domínio, bem como as funções $x \mapsto a_n \cdot x^n, \dots, x \mapsto a_1 \cdot x, x \mapsto a_0$. Pelo item (I) do mesmo teorema segue que:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

é contínua em qualquer ponto do seu domínio, ou seja, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0).$$

Definição 13 (função racional). Uma função racional é uma função da forma:

$$\begin{array}{ccc} r : \mathbb{R} \setminus q^{-1}[\{0\}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais.

Exemplo 14. A função:

$$\begin{array}{ccc} r : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3 - 3x + 2x^2 + 1}{x^4 - 1} \end{array}$$

é uma função racional.

Exemplo 15. A função:

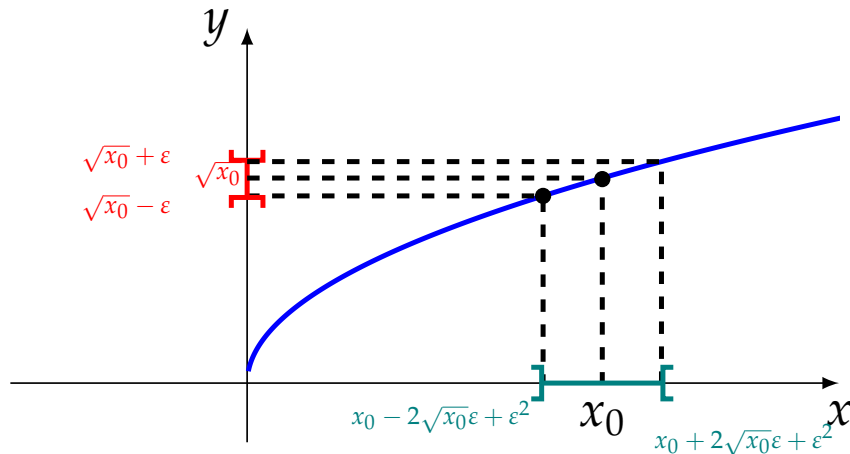
$$\begin{array}{ccc} f : [0, \infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

é contínua em qualquer $x_0 \in [0, \infty[$.

De fato, seja $\varepsilon > 0$ dado e fixado. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que sempre que $x \in [0, \infty[$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ tenhamos:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$$

Fazemos a análise do gráfico abaixo:



Note que devemos tomar cuidado para que o intervalo centrado em $\sqrt{x_0}$ não tenha nenhum número negativo, pois neste caso não poderíamos calcular os extremos usando a regra da função.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja:

$$\eta = \min\left\{\varepsilon, \sqrt{x_0}\right\}$$

e desta forma garantimos que $\sqrt{x_0} - \eta \geq 0$.

A análise do gráfico sugere que devemos tomar $\delta = \min\{2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2, 2\sqrt{x_0}\eta - \eta^2\}$.

Temos assim que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então:

$$-\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow$$

$$-(2\sqrt{x_0}\eta - \eta^2) \leq -\delta < x - x_0 < \delta \leq 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 \Rightarrow$$

$$-(2\sqrt{x_0}\eta - \eta^2) < x - x_0 < 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 \iff$$

$$x_0 - 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 < x < x_0 + 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 \iff$$

$$(\sqrt{x_0} - \eta)^2 < x < (\sqrt{x_0} + \eta)^2 \iff$$

$$\sqrt{x_0} - \eta \leq \sqrt{x_0} - \eta < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \eta \leq \sqrt{x_0} + \eta \iff$$

$$-\eta < \sqrt{x} - \sqrt{x_0} < \eta \iff$$

$$\iff |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \eta$$

Assim, mostramos que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

Veja alguns exemplos concretos de ε para $x_0 = 1$ em <https://www.geogebra.org/m/w5ysft3a>.

Exemplo 16 (■ das funções racionais). Toda função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Com efeito, o domínio de uma função racional $x \mapsto p(x)/q(x)$, onde $x \mapsto p(x)$ e $x \mapsto q(x)$ são funções polinomiais consiste de todos os pontos $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que $q(x_0) \neq 0$. Pelo item (IV) do **Teorema 7**, segue que como toda função polinomial é contínua, seu quociente é contínuo. Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x_0) \neq 0$ tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

Exemplo 17 (■ da função seno). A função $y = \sin(x)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio (veja **Exemplo 8** das Notas da Aula 07), uma vez que, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0).$$

Proposição 18 (■ da função cosseno). Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

Demonstração. Pelas **Fórmulas de Prostaferese**, tem-se, para quaisquer $x, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| = \left| -2 \cdot \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \cdot \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

e portanto:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right|$$

Seja $r > 0$ o número dado no item (5) do **Teorema 1** da AGENDA 02. Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < 2r$, segue que:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq 2 \cdot \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \min\{2r, \varepsilon\}$, e teremos:

$$(x \in \mathbb{R}) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\cos(x) - \cos(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

□

Proposição 19 (da função tangente). Seja $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. Vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan(x) = \tan(x_0).$$

Demonstração. Como $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x_0) \neq 0$. Utilizando que as funções seno e cosseno são ambas contínuas em x_0 , segue do item (IV) do **Teorema 7** que:

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

é contínua em todo seu domínio.

□

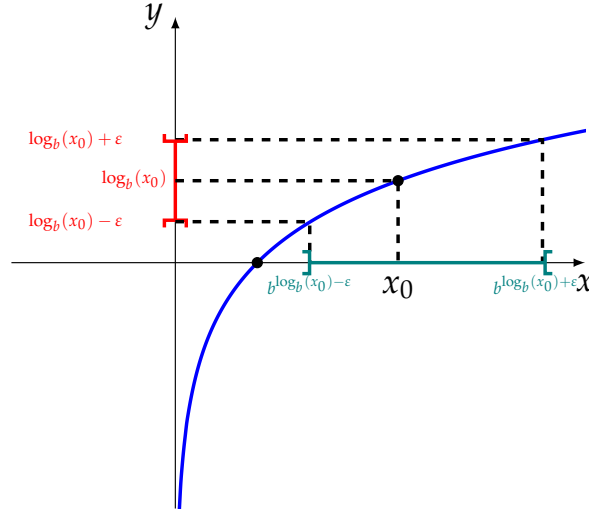
Proposição 20 (da função logarítmica). Seja $b > 1$ um número real fixado. A função:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_b(x) \end{aligned}$$

é contínua em qualquer ponto do seu domínio.

Demonstração. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ qualquer. Mostraremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x > 0) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\log_b(x) - \log_b(x_0)| < \varepsilon$$



Fazendo uma análise do gráfico, encontramos o seguinte palpite (“Ansatz”): devemos tomar δ como o menor dos números $x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}$ e $b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0$, ou seja:

$$\delta = \min\{x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}, b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0\}$$

Mostremos, portanto, que este δ nos servirá. Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \iff -\delta < x - x_0 < \delta$$

Como $\delta \leq x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}$, tem-se $-(x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}) \leq -\delta$ e, é claro que $\delta \leq b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0$. Assim, tem-se:

$$-\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow -(x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}) < x - x_0 < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0$$

e portanto:

$$x_0 - x_0 + b^{\log_b(x_0)-\varepsilon} < x < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0 + x_0 \iff$$

$$\iff b^{\log_b(x_0)-\varepsilon} < x < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon}$$

Finalmente, usamos o fato de que a função logarítmica (para $b > 0$) é estritamente crescente,

$$b^{\log_b(x_0)-\varepsilon} < x < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} \Rightarrow \log_b(x_0) - \varepsilon < \log_b(x) < \log_b(x_0) + \varepsilon \iff$$

$$\iff |\log_b(x) - \log_b(x_0)| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_b(x) = \log_b(x_0).$$

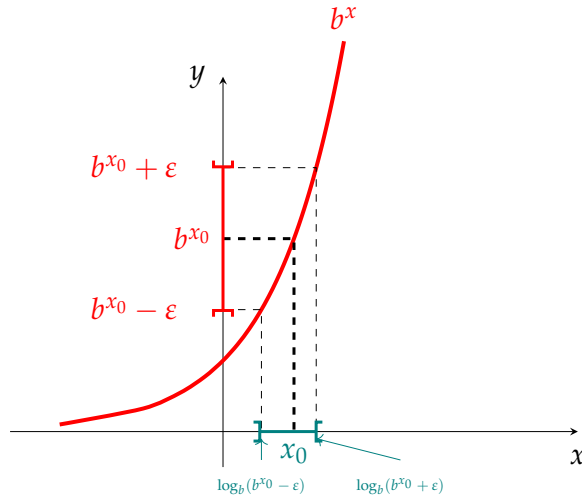
□

Proposição 21 (da função exponencial). *Seja $b > 1$ qualquer. A função:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_b : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto b^x \end{aligned}$$

é contínua em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, fazemos a análise do gráfico a seguir:



Observe que, se tivermos $\varepsilon \geq b^{x_0}$, teremos $b^{x_0} - \varepsilon \leq 0$, de modo que jamais existirá δ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |b^x - b^{x_0}| < \varepsilon$, pois $\log_b$ não estará definido em $b^{x_0} - \varepsilon \leq 0$. Para garantir que não estaremos subtraindo nenhum número que torne $b^{x_0} - \varepsilon \leq 0$, vamos considerar, dado o $\varepsilon > 0$, o número

$$\eta = \min \left\{ \varepsilon, \frac{b^{x_0}}{2} \right\}$$

Note que, agora sim, tem-se $b^{x_0} - \eta \geq \frac{b^{x_0}}{2} > 0$, de modo que não recairemos no problema anteriormente descrito e poderemos extrair o logaritmo tranquilamente.

A análise do gráfico nos sugere que devemos tomar:

$$\delta = \min \{ x_0 - \log_b(b^{x_0} - \eta), \log_b(b^{x_0} + \eta) - x_0 \}$$

Agora devemos verificar que este δ é tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |b^x - b^{x_0}| < \varepsilon$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta &\iff \\ \iff -\delta < x - x_0 < \delta &\iff \\ \iff -x_0 + \log_b(b^{x_0} - \eta_1) < x - x_0 < \log_b(b^{x_0} + \eta_1) - x_0 &\iff \\ \log_b(b^{x_0} - \eta_1) < x < \log_b(b^{x_0} + \eta_1) & \\ \iff b^{x_0} - \eta_1 < b^x < b^{x_0} + \eta_1 &\iff \\ \iff -\eta_1 < b^x - b^{x_0} < \eta_1 &\iff \\ |b^x - b^{x_0}| < \eta_1 \leq \varepsilon & \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \mathcal{E}_b(x) = \mathcal{E}_b(x_0).$$

□

Você poderá verificar alguns casos concretos de valores de ε para constatar a continuidade da função $\mathcal{E}_2(x) = 2^x$ em $x_0 = 1$ no applet <https://www.geogebra.org/m/vha7pknn>.

Teorema 22 (da função composta). *Sejam $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ uma função contínua em $x_0 \in A'$ e $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $g(x_0) \in B$. Então $f \circ g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 .*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $g(x_0) \in B$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$(y \in B) \& (|y - g(x_0)| < \eta) \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

Também, como g é contínua em x_0 , dado este $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A) \& (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \eta$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando o δ acima tem-se que:

$$(x \in A) \& (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (g(x) \in B) \& (|g(x) - g(x_0)| < \eta) \\ \Rightarrow (f(g(x)) \in \mathbb{R}) \& (|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon)$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

□

3 Cálculo de Alguns Limites

Com o que vimos até agora, já somos capazes de calcular diversos limites. Nesta seção daremos diversos exemplos do cálculo de limites.

Exemplo 23. *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 4x^2 - 3$$

Solução:

Usamos que a função em apreço é polinomial, e portanto contínua em todo o seu domínio. Desta forma:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 4x^2 - 3 = 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 = 1 + 4 - 3 = 2.$$

Exemplo 24. *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$$

Solução:

Vemos que a função em apreço é uma função racional, e sabemos que toda função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio, que neste caso é $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{5^4 + 5^2 - 1}{5^2 + 5} = \frac{625 + 25 - 1}{25 + 5} = \frac{629}{30}$$

Exemplo 25. *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3}$$

Solução: A função:

$$h : \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{4x^2 - 3}$$

pode ser vista como a composição:

$$\left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty \right[\xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x^2 - 3 \mapsto \sqrt{4x^2 - 3}$$

Como $g(x) = 4x^2 - 3$ é polinomial, segue que g é contínua em -2 . Também, pelo **Exemplo 27** das notas de aula precedentes, $f(y) = \sqrt{y}$ é contínua em $y = g(-2) = 13 \in \mathbb{R}_+$. Pelo **Teorema 33** das notas da aula anterior, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{4 \cdot (-2)^2 - 3} = \sqrt{13}.$$

Exemplo 26. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Solução: A função $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ pode ser vista como a composta:

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

isto é, como a composta de $f(y) = \sqrt{y}$ com $g(x) = \sqrt{x}$. Pelo **Exemplo 27** da aula anterior, tem-se que f e g são ambas contínuas. Decorre do **Teorema 33** das notas da aula anterior, que $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ é contínua, de modo que como $64 \in \mathbb{R}_+$, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Pelo **Lema 12** das notas da aula 07, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 27. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Solução: Note que aqui temos a função racional:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{2\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 2} \end{aligned}$$

que é contínua em todos os pontos de seu domínio. No entanto, $2 \notin \text{dom}(f)$, de modo que **não podemos substituir x por 2 na expressão algébrica dada**. Usamos, aqui, “O” Teorema, como segue:

Tem-se, para qualquer $x \neq 2$:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2) \cdot \cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}} = x + 2$$

Assim, a função f dada acima coincide com:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 2 \end{aligned}$$

em todo ponto $x \neq 2$. A função g é contínua. Assim, pel’O’ Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Exemplo 28. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(2x)$$

Solução: A função dada por $x \mapsto \sin(2x)$ é a composta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x & \mapsto & \sin(2x) \end{array}$$

Mas $g(x) = 2x$ é contínua em π , e $g(\pi) = 2\pi$, e $f(y) = \sin(y)$ é contínua em $y = g(\pi) = 2\pi$. Desta forma, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(2x) = \sin(2\pi) = 0.$$

Exemplo 29. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$$

Solução: Fatoramos:

$$x - 3 = (\sqrt{x} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})$$

de modo que para qualquer $x \neq 3$ tem-se:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \frac{(\cancel{\sqrt{x}} - \cancel{\sqrt{3}})}{(\cancel{\sqrt{x}} - \cancel{\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$$

Como a função $x \mapsto \sqrt{x}$ é contínua (**Exemplo 27** das notas da aula anterior), tem-se $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Exemplo 30. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$$

Solução: fatoramos:

$$x - 2 = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})$$

de modo que, para qualquer $x \neq 2$, tem-se:

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}$$

Pel“O” Teorema, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Exemplo 31. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$$

Solução: Façamos:

$$\begin{aligned} u :] - 1, \infty[\setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \sqrt{u} \end{aligned}$$

de modo que:

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} = g(u) = \sqrt{u}$$

Já sabemos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2,$$

e como g é contínua em $u_0 = 2$, segue do **Teorema 22** que:

$$\lim_{u \rightarrow 2} \sqrt{u} = \sqrt{2}.$$

Exemplo 32. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$$

Solução: Fazemos $u(x) = 3 - x^3$ e notamos, primeiramente, que

$$\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 - x^3 = 3 - 1 = 2.$$

Como $x^3 - 1 = -u + 2$, segue que:

$$\frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1} = \frac{u^4 - 16}{2 - u} = \frac{(u - 2) \cdot (u + 2) \cdot (u^2 + 4)}{2 - u}$$

Pelo **Teorema 22**, segue que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1} &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u - 2) \cdot (u + 2) \cdot (u^2 + 4)}{2 - u} = \lim_{u \rightarrow 2} -(u + 2) \cdot (u^2 + 4) = \\ &= -(2 + 2) \cdot (2^2 + 4) = -4 \cdot 8 = -32. \end{aligned}$$

Referências

- [1] ALMAY, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1ª edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.
- [2] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

- [3] MAURER, W. A., **Fundamentos Aritméticos e Topológicos**, Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1977.

- [4] MELLO, A. A. H., **Por que temer os épsilons e deltas?**, Revista Matemática Universitária, Número 4, 1986.