MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral I
1^o semestre de 2025
Agenda 01

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Introdução

A força gravitacional exercida entre a Terra, a Lua e o Sol, conjugada com a rotação da Terra em torno do seu eixo, é um dos principais fatores responsáveis pela ocorrência das marés, fenômeno no qual as águas do mar atingem limites máximos e mínimos com determinada periodicidade.

Conforme sabemos, os fenômenos periódicos podem ser modelados fazendo uso das funções trigonométricas estudadas no Ensino Médio. Assim, não é difícil ver a imensa importância dessas funções em praticamente todas as ciências exatas, incluindo, é claro, a Oceanografia, a Astronomia, a Geofísica e a a Meteorologia.

Neste texto introduziremos formalmente as chamadas "funções trigonométricas diretas". Começamos com uma exposição de duas funções trigonométricas fundamentais, em termos das quais todas as outras serão definidas.

Na última seção, apresentaremos dois modelos de um processo denominado "regressão senoidal", muito útil para modelar fenômenos periódicos.

1 Funções Trigonométricas Diretas: Seno e Cosseno

Nesta seção daremos uma descrição das chamadas "funções trigonométricas diretas" (ou "funções circulares"). Analisaremos a descrição dada por H. Guidorizzi, provando alguns resultados não demonstrados em seu livro.

*jeancb@ime.usp.br

Apenas cinco propriedades são suficientes para descrever completamente as funções trigonométricas "seno" e "cosseno".

Enunciamos o seguinte resultado, cuja prova omitiremos por fugir ao objetivo deste curso.

Teorema 1. *Existe um único par de funções, indicadas por:*

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

denominadas ***seno*** *e* ***cosseno****, respectivamente, satisfazendo as propriedades:*

(1) $\sin(0) = 0$;

(2) $\cos(0) = 1$;

(3) *Para quaisquer números reais a, b:*

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

(4) *Para quaisquer números reais a, b:*

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

(5) *Existe $r > 0$ tal que para qualquer x tal que $0 < x < r$ vale:*

$$0 < \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Destas propriedades podemos deduzir todas as demais. Em seguida, enunciaremos e demonstraremos várias destas propriedades.

A proposição abaixo apresenta o que conhecemos por **Indentidade Trigonométrica Fundamental**.

Proposição 2. *Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, tem-se:*

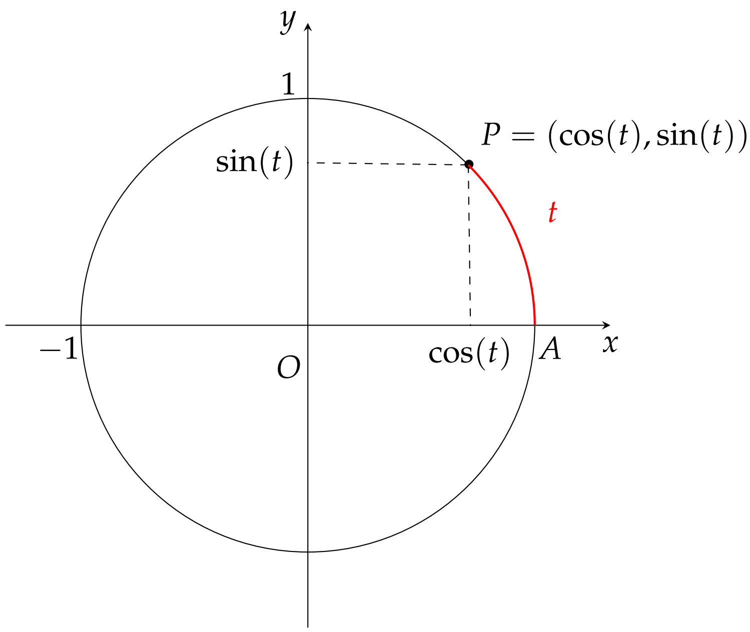
$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Demonstração. De fato, fazendo $t = a = b$ em (4), segue que:

$$1 = \cos(0) = \cos(t - t) = \cos^2(t) + \sin^2(t).$$

$\square$

Em virtude do resultado acima, concluímos que para qualquer número real t, o ponto $(\cos(t), \sin(t))$ pertence à circunferência unitária centrada na origem, de equação $x^2 + y^2 = 1$.



Consequentemente, as funções seno e cosseno são ambas funções limitadas.

Proposição 3. *As funções* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são ambas limitadas.*

Demonstração. De fato, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

de modo que, como $\cos^2(x) \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$, e como $\sin^2(x) \geq 0$, $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$. Daí segue que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin(x)| \leq 1)$$

e:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|\cos(x)| \leq 1)$$

$\square$

Para efeito de interpretação geométrica, você poderá considerar t do mesmo modo que fazia no Ensino Médio: t é a medida, em radianos, do arco $\widehat{AP}$. Recorde que a medida de um arco é de 1 (um) radiano (notação 1 rd) se seu comprimento for igual ao raio da circunferência de que ele faz parte (1rd $\approx 57^o16'$).

Um segundo resultado cuja demonstração adiaremos é o seguinte:

Teorema 4. *Existe um número positivo a tal que* $\cos(a) = 0$. *Para este a, tem-se* $\sin(a) = 1$.

Tendo como certa a existência de tal número, podemos garantir a unicidade do número a ao exigirmos que seja o *menor* dos números positivos tais que $\cos(a) = 0$. Definimos o número π (o mesmo que conhecemos do Ensino Médio) convenientemente como sendo o dobro de a. Formalmente:

Definição 5. *O número π é $2a$, onde a é o* menor *número positivo satisfazendo a* ***Proposição 4***.

Assim sendo, $\pi/2$ é o menor número positivo tal que $\cos(\pi/2) = 0$, e pelo **teorema 1**, $\sin(\pi/2) = 1$.

Definição 6. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***par*** *se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = f(-x)).$$

Dizemos que f é ***ímpar*** *se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(-x) = -f(x)).$$

Nos termos da definição acima, podemos enunciar a seguinte:

Proposição 7. cos *é uma função par, enquanto que* sin *é uma função ímpar.*

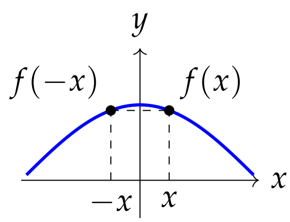
Demonstração. Devemos mostrar que dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\cos(-x) = \cos(x)$. Ora, por (4), tem-se:

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos(0) \cdot \cos(x) + \sin(0) \cdot \sin(x),$$

e como por (1) e (2) tem-se que $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, segue que:

$$\cos(-x) = \cos(0) \cdot \cos(x) + \sin(0) \cdot \sin(x) = 1 \cdot \cos(x) + 0 \cdot \sin(x) = \cos(x).$$

Provamos, portanto, que cos é uma função **par**. Observe, abaixo, o aspecto do gráfico da função cosseno nas proximidades da origem do plano cartesiano:



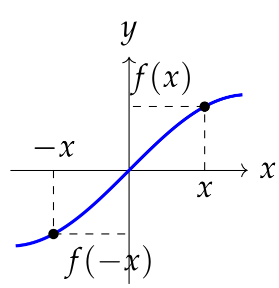
Há uma simetria especular com respeito ao eixo Oy.

Devemos mostrar, agora, que sin é uma função ímpar, ou seja, que dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ vale $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Por (3), tem-se:

$$\sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin(0)\cos(x) - \sin(x)\cos(0) = 0 \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot 1 = -\sin(x),$$

e segue que sin é uma função **ímpar**. Observe, abaixo, o aspecto do gráfico da função seno nas proximidades da origem do plano cartesiano:



No caso acima, há uma simetria com respeito à origem do plano (ou seja, da reta de equação $y = x$). $\square$

Proposição 8. *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Demonstração. De fato, levando em conta, pela **Proposição 7**, que $\cos(-b) = \cos(b)$ e que $\sin(-b) = -\sin(b)$ temos:

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

e:

$$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) - \sin(-b)\cos(a) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

□

Corolário 9. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Demonstração. Tem-se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

□

Corolário 10. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\begin{cases} \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$$

Demonstração. Consideremos as seguintes igualdades, dadas pela **Proposição 2**:

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

e pelo **Corolário 9**:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Segue-se que:

$$1 + \cos(2x) = [\cos^2(x) + \sin^2(x)] + [\cos^2(x) - \sin^2(x)] = 2\cos^2(x)$$

e portanto:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Também:

$$1 - \cos(2x) = [\cos^2(x) + \sin^2(x)] - [\cos^2(x) - \sin^2(x)] = 2\sin^2(x)$$

e portanto:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

□

Com os resultados acima podemos calcular alguns valores notáveis das funções seno e cosseno:

Para $x = \pi/4$, podemos observar que:

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

e portanto que:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Mas sabemos que:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

de onde podemos deduzir que:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

ou seja,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Concluímos, assim, que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pela **Definição 5**, como $\pi/4 < \pi/2$, concluímos que $\cos(\pi/4) > 0$, logo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Daqui podemos deduzir que:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mas note que:

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

e portanto:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vamos calcular as funções seno e cosseno em π. Note que:

$$\cos(\pi) = \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

e como deve-se ter:

$$\cos^2(\pi) + \sin^2(\pi) = 1,$$

segue que:

$$1 + \sin^2(\pi) = 1,$$

e portanto $\sin(\pi) = 0$. Segue também que:

$$\cos(2\pi) = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = 1 - 0 = 1$$

e:

$$\sin(2\pi) = 2\sin(\pi)\cos(\pi) = 0.$$

Proposição 11. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos:*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

e:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

Demonstração. Temos, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \sin(2\pi)\cos(x) = \sin(x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(x) = \sin(x)$$

e:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x) \cdot 1 - \sin(x) \cdot 0 = \cos(x)$$

□

Proposição 12. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se:*

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

e:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em k.

Para $k = 1$, o resultado já foi provado na **Proposição 11**. Suponhamos que dado $k > 1$, valha:

$$\text{(Hipótese de Indução)}: \ \cos(x + 2(k-1)\pi) = \cos(x).$$

Temos, pela **Proposição 11** :

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x + (2(k-1+1)\pi) =$$
$$= \cos(x + (2(k-1)\pi) + 2\pi) = \cos(x + 2(k-1)\pi) = \cos(x).$$

A demonstração da segunda parte do resultado é análoga. Suponhamos que dado $k > 1$, valha:

$$\text{(Hipótese de Indução)}: \ \sin(x + 2(k-1)\pi) = \sin(x).$$

Assim:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x + (2(k-1+1)\pi) =$$
$$= \sin(x + (2(k-1)\pi) + 2\pi) = \sin(x + 2(k-1)\pi) = \sin(x).$$

□

O resultado acima pode ser estendido para valores inteiros de k (ou seja, para números negativos) se levarmos em conta a paridade das funções seno e cosseno. Para qualquer $k < 0$ inteiro, tem-se $-k \in \mathbb{N}$, de modo que $k = -(-k)$. Assim, por (4) e em virtude da paridade de seno e cosseno, tem-se:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x + 2 \cdot [-(-k)]\pi) = \cos(x - 2(-k)\pi) =$$
$$= \cos(x)\cos(2(-k)\pi) + \sin(x)\sin(2(-k)\pi) = \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0 = \cos(x).$$

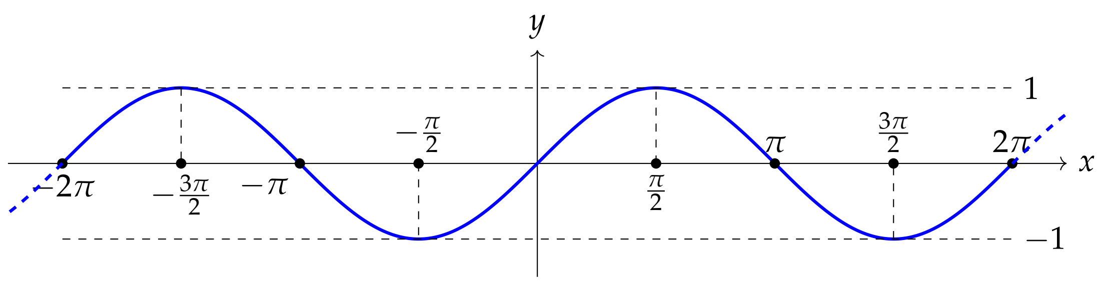
e por (3):

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x + 2 \cdot [-(-k)]\pi) = \sin(x - 2(-k)\pi) =$$
$$= \sin(x)\cos(2(-k)\pi) - \sin(2(-k)\pi)\cos(x) = \sin(x) \cdot 1 - \cos(x) \cdot 0 = \sin(x).$$

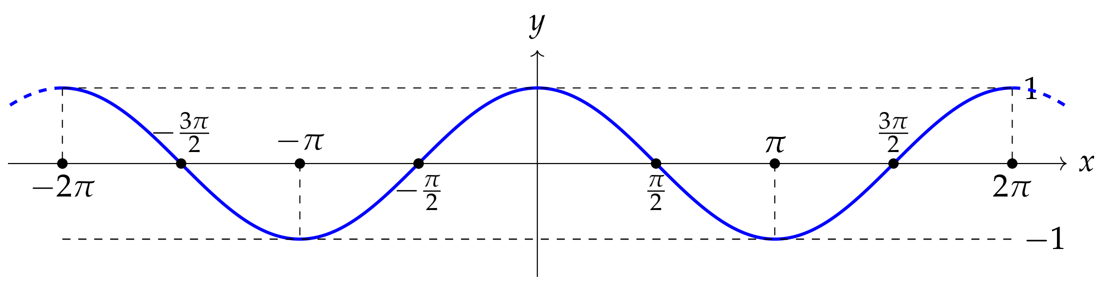
Concluímos assim que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$(\forall k \in \mathbb{Z})((\cos(x + 2k\pi) = \cos(x))\&(\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)))$$

O gráfico da função seno tem o seguinte aspecto:



O gráfico da função cosseno tem o seguinte aspecto:



Proposição 13. *Dado qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\sin(\theta) = 0 \iff \theta = k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}$$

Proposição 14. *Dado qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\sin(\theta) = 1 \iff \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Demonstração. Claramente que, como $\sin(\pi/2) = 1$ tem-se para qualquer $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Precisamos, portanto, demonstrar que se $\sin(\theta) = 1$ então $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\sin(\theta) = 1$. Segue imediatamente que $\cos(\theta) = 0$. Note que:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) = \sin(\theta) \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0.$$

Como sabemos que os únicos números reais cujo seno é zero são os múltiplos inteiros pares de π, segue que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\theta - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$$

ou seja,

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

□

Teorema 15 (Fórmulas de Prostaférese). *Tem-se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Demonstração. Observando que:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$$

e

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

podemos escrever:

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\sin(y) = \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(y) = \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Desta forma, somando e subtraindo as expressões correspondentes, obteremos:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

□

2 Estudo de Variações das Funções Trigonométricas Seno e Cosseno

Nesta seção, f denotará ou a função seno ou a função cosseno. Retomamos o conceito visto nas notas de aula anteriores:

Definição 16 (função periódica). *Uma função* $g : \mathrm{dom}\,(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é **periódica** se existir um número positivo, p, tal que:*

$$(\forall x \in \mathrm{dom}\,(g))(x + p \in \mathrm{dom}\,(g) \Rightarrow g(x+p) = g(x))$$

Definição 17 (período). *Seja $g : \mathrm{dom}\,(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica. O* ***período*** *de g é o* menor *número positivo, p_0, tal que:*

$$(\forall x \in \mathrm{dom}\,(g))(x + p_0 \in \mathrm{dom}\,(g) \Rightarrow g(x + p_0) = g(x))$$

Em termos gráficos, as funções periódicas repetem a curva do seu gráfico em intervalos de comprimento igual ao do seu período.

Exemplo 18. *O período da função seno é $p_0 = 2\pi$. De fato, pela* ***Proposição 11****, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Afirmamos que nenhum *número positivo p* estritamente menor *que 2π satisfaz:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x + p) = \sin(x))$$

Suponha, por absurdo, que exista $0 < p < 2\pi$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x + p) = \sin(x))$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x + p) - \sin(x) = 0)$$

Usando uma das fórmulas de prostaférese, temos:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(2 \cdot \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0\right)$$

Como a identidade acima deve valer para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que:

$$\sin\left(\frac{p}{2}\right) = 0,$$

o que, pela ***Proposição 13****, ocorre se, e somente se existir algum inteiro $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:*

$$\frac{p}{2} = k_0 \cdot \pi$$

ou seja, tal que:

$$p = 2 \cdot k_0 \cdot \pi.$$

No entanto, sabemos que $0 < p < 2\pi$, logo devemos ter:

$$0 < 2 \cdot k_0 \cdot \pi < 2 \cdot \pi$$

$$0 < k_0 < 1$$

ou, equivalentemente, k_0 será um número inteiro entre 0 e 1, um absurdo.

Como nenhum número positivo p menor do que 2π é tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x+p) = \sin(x))$, segue que 2π é o período da função seno.

2.1 Variações do Período

Seja $y = f(x)$ uma função trigonométrica de período p, ou seja, tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$$

Dado um número $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos obter as seguintes funções:

(1)

$$\begin{array}{rccc} g: & \operatorname{dom}(f) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda + f(x) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá o mesmo período da função f, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x+p) = \lambda + f(x+p) = \lambda + f(x) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < p$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\lambda + f(x+p') = g(x+p') = g(x) = \lambda + f(x))$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p') = f(x)),$$

ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

(2)

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá o mesmo período da função f, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x+p) = \lambda \cdot f(x+p) = \lambda \cdot f(x) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < p$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\lambda \cdot f(x+p') = g(x+p') = g(x) = \lambda \cdot f(x))$$

Como $\lambda \neq 0$, podemos dividir os dois membros da igualdade:

$$\lambda \cdot f(x+p') = \lambda \cdot f(x)$$

por λ, de modo a concluir que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p') = f(x)),$$

ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

Observação: é comum denominarmos o número $|\lambda|$ por **amplitude** da função g.

(3)

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x+\lambda) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá o mesmo período da função f, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x+p) = f(x+p+\lambda) = f((x+\lambda)+p) = f(x+\lambda) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < p$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p'+\lambda) = g(x+p') = g(x) = f(x+\lambda))$$

ou seja:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+\lambda+p') = f(x+\lambda)).$$

Assim, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, tem-se $f(y+p') = f(y-\lambda+\lambda+p') = f(y-\lambda+\lambda) = f(y)$. Logo,

$$(\forall y \in \mathbb{R})(f(y+p') = f(y))$$

ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathrm{dom}(f))(x+p \in \mathrm{dom}\,(f) \Rightarrow f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

Observação: é comum denominarmos o número λ por **constante de fase** ou **fase inicial** da função g.

(4)

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{dom}\,(f) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(\lambda \cdot x) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá período igual a $p/|\lambda|$, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ tal que $x+p \in \mathrm{dom}\,(f)$, tem-se $g\left(x+\frac{p}{|\lambda|}\right) = f\left(\lambda \cdot \left(x+\frac{p}{|\lambda|}\right)\right) = f(\lambda \cdot x \pm p) = f(\lambda \cdot x) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < \frac{p}{|\lambda|}$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(\lambda \cdot x + \lambda \cdot p') = f(\lambda \cdot (x+p')) = g(x+p') = g(x) = f(\lambda \cdot x))$$

Seja $y \in \mathbb{R}$. Como $\lambda \neq 0$, podemos escrever $y = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot y\right)$. Assim,

$$f(y+|\lambda| \cdot p') = f\left(\lambda \cdot \left(\frac{y}{\lambda}\right) + |\lambda| \cdot p'\right) = f\left(\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot y \pm p'\right)\right) = f\left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} y\right) = f(y)$$

Note que como $p' < \frac{p}{|\lambda|}$, tem-se $|\lambda| \cdot p' < p$, ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

Exemplo 19. *Em virtude do item (3) acima, como:*

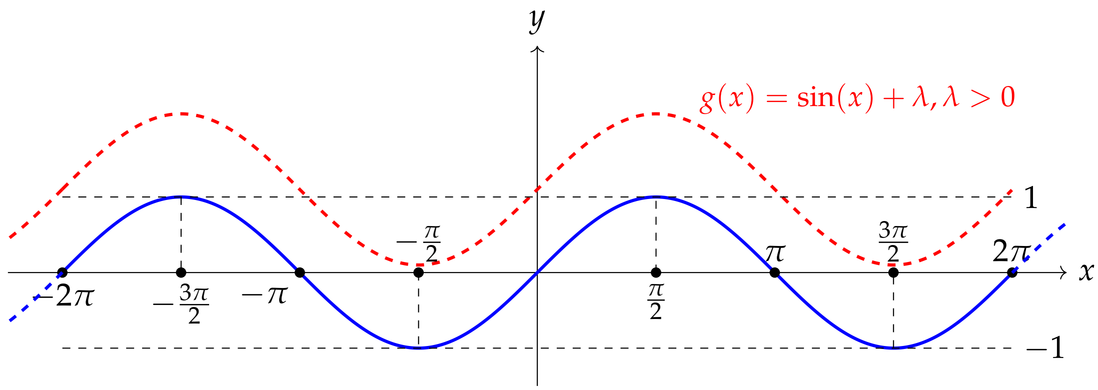
$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\cos(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

tem-se que a função $g(x) = \cos(x)$ é obtida de $f(x) = \sin(x)$ somando-se uma constante ($\lambda = \pi/2$) ao argumento (x). Logo, o período da função cosseno coincide com o período da função seno, ou seja, é igual a 2π.

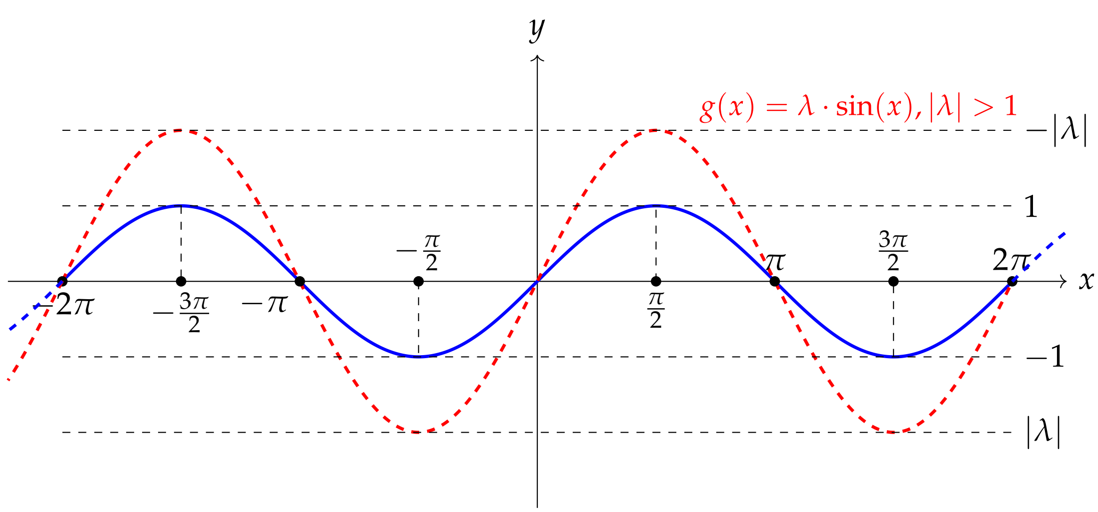
2.2 Variações do Gráfico

Considerando-se os casos (1), (2), (3) e (4), temos as seguintes alterações nos gráficos das funções trigonométricas:

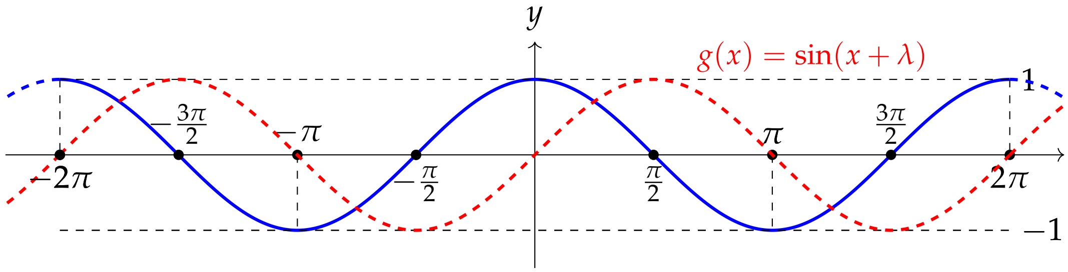
(1) No caso em que $g(x) = \lambda + f(x)$, verifica-se que o gráfico da função g é obtido do gráfico da função f por um deslocamento na vertical de $|\lambda|$ unidades: o gráfico sobe quando $\lambda > 0$ e desce quando $\lambda < 0$. Se $f(x)$ é a função seno (ou cosseno), então a imagem da função g será o intervalo $[-1 + \lambda, 1 + \lambda]$.



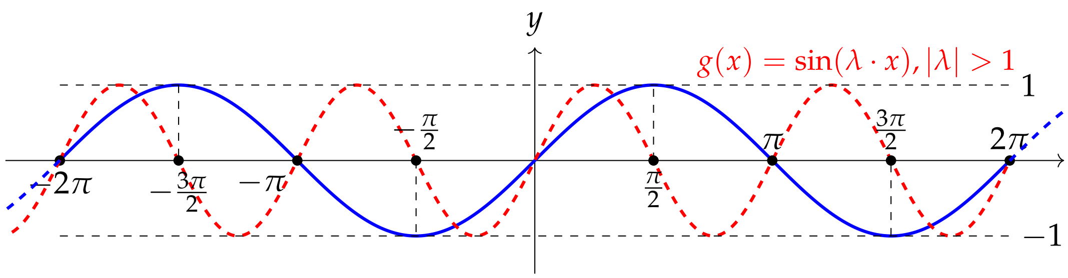
(2) No caso em que $g(x) = \lambda \cdot f(x)$, verifrica-se que o gráfico da função g é obtido mediante uma deformação (um "esticamento" ou "encolhimento") na vertical do gráfico da função f. O gráfico *abre* quando $|\lambda| > 1$, ou encolhe verticalmente quando $|\lambda| < 1$. Se $\lambda < 0$, o gráfico ainda gira em 180 graus em torno do eixo x. Se f é a função seno (ou cosseno), a imagem de g será $[-1 \cdot |\lambda|, 1 \cdot |\lambda|]$.



(3) No caso em que $g(x) = f(\lambda + x)$, verifica-se que o gráfico de g é obtido por um deslocamento horizontal de $|\lambda|$ unidades do gráfico da função f: desloca-se para a direita quando $\lambda < 0$ ou para a esquerda quando $\lambda > 0$.



(4) No caso em que $g(x) = f(\lambda \cdot x)$, verifica-se que o gráfico da função g é obtido por uma deformação (um "esticamento" ou "encolhimento") na horizontal do gráfico de f; devido à mudança no período da função, que de p passou a ser $p/|\lambda|$, o gráfico de f se alonga quando $|\lambda| < 1$ e se encolhe quando $|\lambda| > 1$.



Podemos combinar todas as variações acima nas funções seno e cosseno, a fim de obter suas chamadas "variações". Mais precisamente, denominaremos uma função com lei do tipo:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

por **"variação da função seno"**, e uma função do tipo:

$$f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$$

por **"variação da função cosseno"**.

Em virtude de analogias e aplicações ao estudo de movimentos harmônicos, os parâmetros acima recebem nomes "emprestados" da Física: em ambos os casos, a constante a é denominada **"a amplitude da função"**, e corresponde a metade da variação máxima da função (i.e., à metade da diferença entre o maior valor assumido pela função e o menor valor assumido por essa função), b é a **"frequência angular"**, c é denominada a **"constante de fase"** e d é denominado o **“deslocamento vertical”**.

Você poderá verificar os efeitos dos parâmetros de uma função obtida da função seno no applet Geogebra em https://www.geogebra.org/m/bjgrfhay.

3 Funções Trigonométricas Diretas: Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

Definimos a função **tangente** abaixo:

Definição 20. *A* ***função tangente*** *é dada por:*

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Note as seguintes características da função tangente:

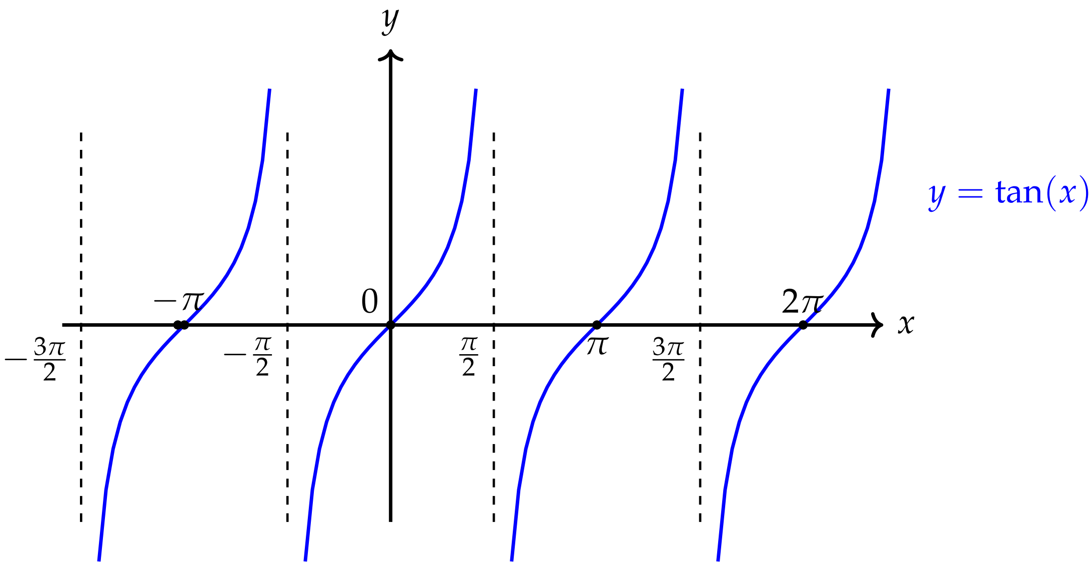
• Trata-se de uma função ímpar, uma vez que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

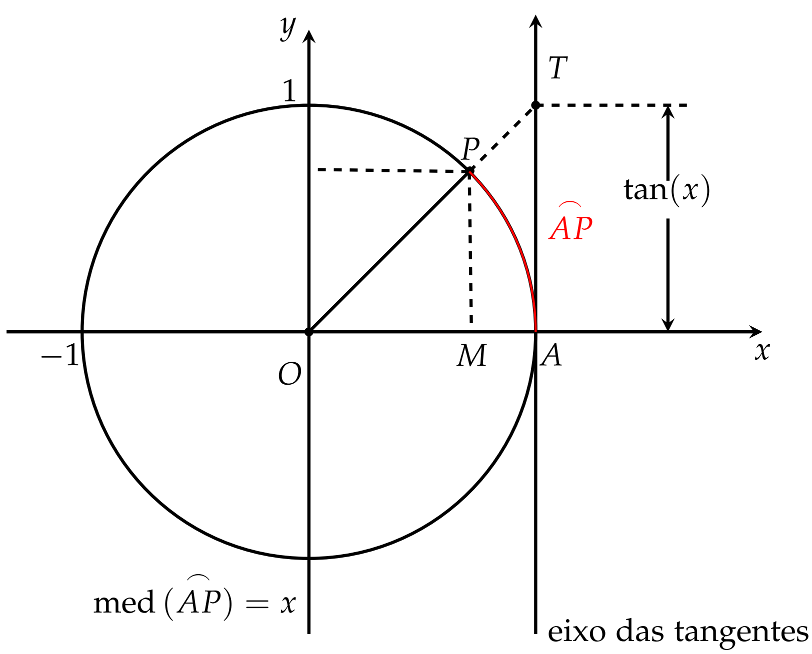
• Os zeros da função tan são os pontos onde sin se anula, ou seja, são os pontos da forma $k \cdot \pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

• No intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ a função tan é crescente.

O gráfico da função tangente tem o seguinte aspecto:



Geometricamente, interpretamos $\tan(x)$ como medida algébrica do segmento AT, no qual T é a interseção da reta OP com o *eixo das tangentes* e $\overset{\frown}{AP}$ o arco de medida x radianos:



Os triângulos OMP e OAT são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{MP}} = \frac{1}{\overline{OM}}$$

ou:

$$\frac{\overline{AT}}{1} = \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}$$

isto é:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Proposição 21. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

tem período igual a π*.*

Demonstração. Para verificar que π é o período, primeiro mostramos que:

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(\tan))(\tan(x+\pi) = \tan(x))$$

De fato, tem-se:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\cdot\cos(\pi) - \sin(x)\cdot\sin(\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Resta, agora, argumentar que não há nenhum número positivo menor do que π com esta propriedade. De fato, se existisse um número $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < \pi$ com $(\forall x \in \operatorname{dom}(\tan))(\tan(x+p) = \tan(x))$, teríamos:

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(\tan)) \left(\frac{\sin(x+p)}{\cos(x+p)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)$$

e portanto:

$$\frac{\sin(x)\cdot\cos(p) + \sin(p)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\cdot\cos(p) - \sin(x)\cdot\sin(p)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cancel{\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\cos(p)} + \sin(p)\cdot\cos^2(x) = \cancel{\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\cos(p)} - \sin^2(x)\cdot\sin(p)$$

$$\sin(p)\cdot(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 0$$
$$\sin(p) = 0$$

Pela **Proposição 13**, $\sin(p) = 0 \iff p = k \cdot \pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Teríamos, assim, $0 < k \cdot \pi < \pi$, ou seja, um número inteiro k maior que 0 e menor que 1, um absurdo. □

As funções sec (secante), csc (cossecante) e cot (cotangente) são dadas por:

Definição 22 (função secante). *A função:*

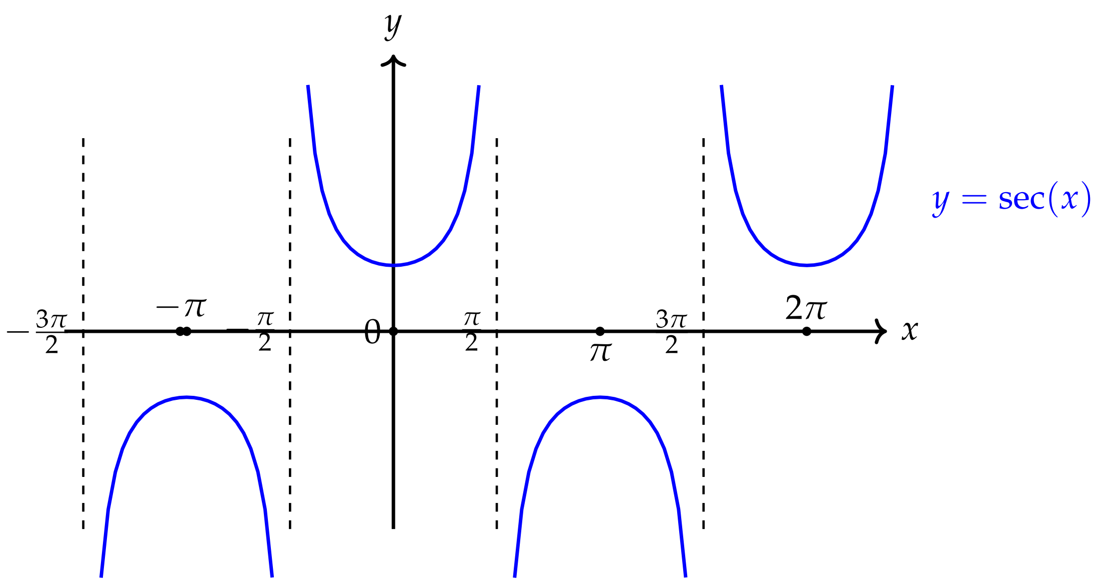
$$\begin{array}{rccc} \sec: & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

*é chamada **função secante**.*

Note que a função sec é uma função par, uma vez que para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tem-se:

$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x).$$

O gráfico da função secante tem o seguinte aspecto:



Definição 23 (função cossecante). *A função:*

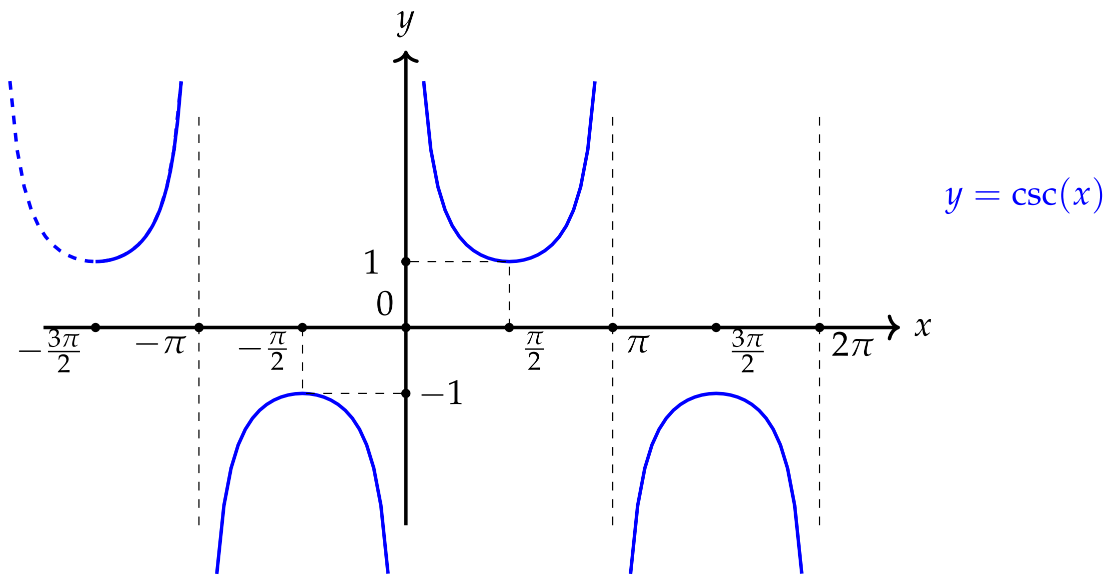
$$\begin{array}{rccc} \csc: & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sin(x)} \end{array}$$

*é chamada **função cossecante**.*

A função csc, por sua vez, é ímpar, uma vez que para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tem-se:

$$\csc(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\sin(x)} = -\csc(x).$$

O gráfico da função cossecante tem o seguinte aspecto:



Definição 24 (função cotangente). *A função:*

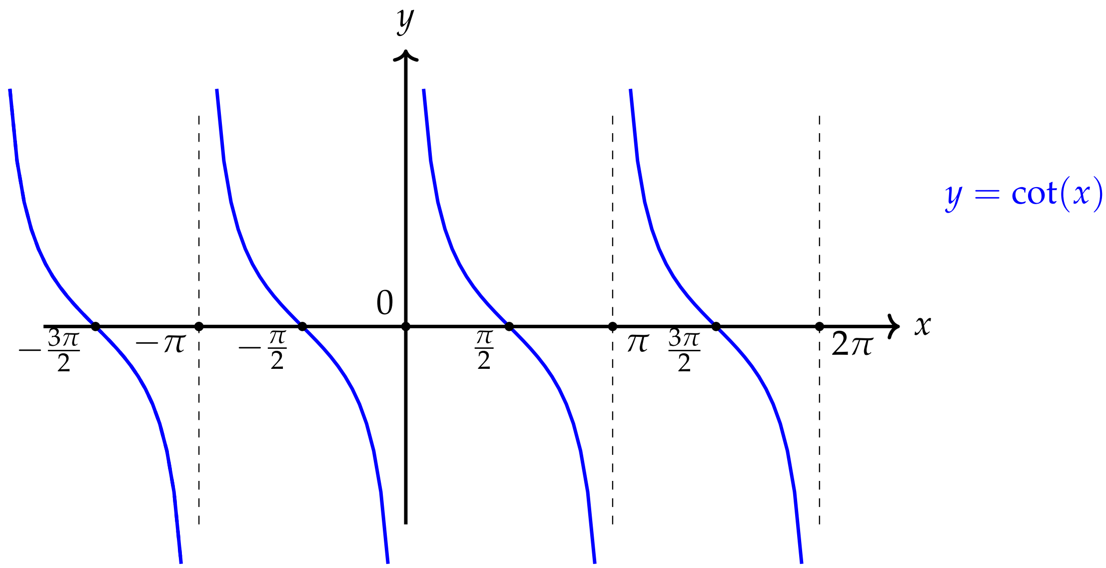
$$\begin{array}{rccc} \cot: & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}$$

é chamada ***função cotangente****.*

Finalmente, a função cot também é ímpar. De fato, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tem-se:

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\cot(x)$$

O gráfico da função tangente tem o seguinte aspecto:



4 Funções Trigonométricas Inversas (ou "funções ciclométricas")

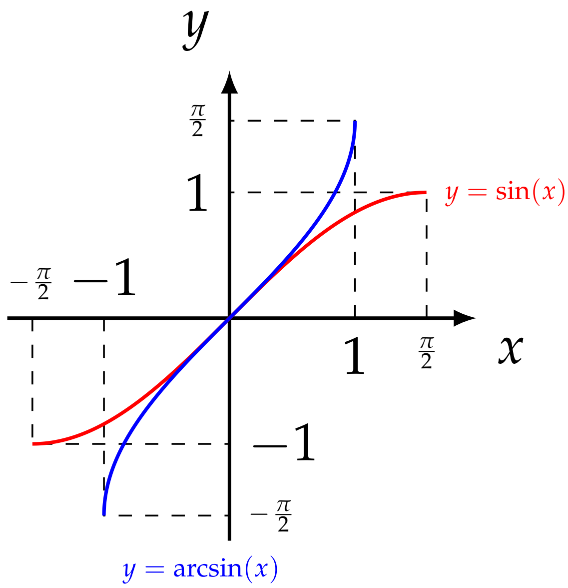
Para todo $k \in \mathbb{Z}$, a função:

$$\begin{array}{rcl} \sin\restriction_{\left[k\cdot\pi-\frac{\pi}{2},k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\right]}: \left[k\cdot\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\cdot\pi+\dfrac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

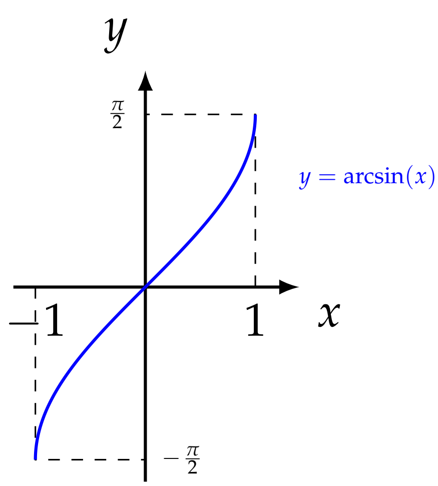
é bijetora, de modo que pelo **teorema 82** das Notas de Aulas da Semana 1, $\sin\restriction_{\left[k\cdot\pi-\frac{\pi}{2},k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\right]}$ admite uma função inversa, com domínio em $[-1,1]$ e imagem em $\left[k\cdot\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\cdot\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$. A esta função inversa denominamos **função arco-seno**, que a cada $x \in [-1,1]$ associa o arco cujo seno é x, e a denotamos por:

$$\begin{array}{rcl} \text{arcsin}: \quad [-1,1] & \rightarrow & \left[k\cdot\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\cdot\pi+\dfrac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \text{arcsin}(x) \end{array}$$

A fim de simplificar nossos estudos, vamos restringir nossa atenção para o caso em que $k = 0$. Para obtermos o gráfico da função arcsin, usamos o **teorema 86** das Notas de Aulas da Semana 1, refletindo o gráfico da função seno restrita ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, representado abaixo em vermelho, pela bissetriz do primeiro quadrante, obtendo a curva em azul:



O gráfico da função arco-seno tem o seguinte aspecto:



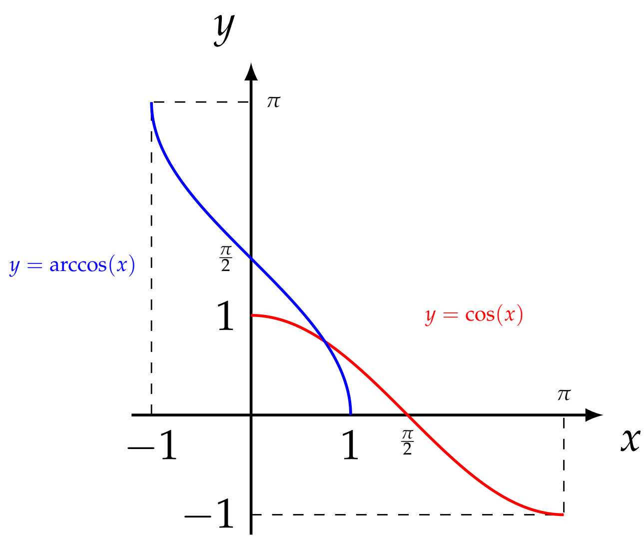
Para todo $k \in \mathbb{Z}$, a função:

$$\begin{array}{rccc} \cos\restriction_{[k\cdot\pi,(k+1)\cdot\pi]}: & [k\cdot\pi,(k+1)\cdot\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

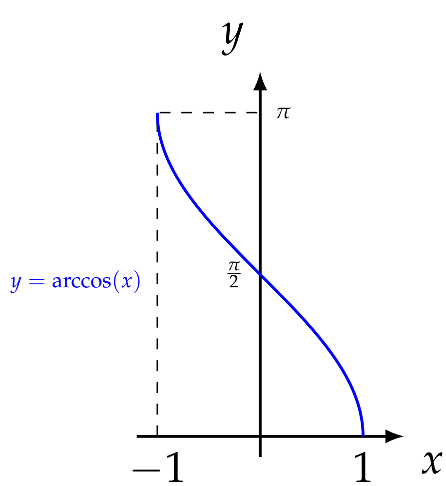
é bijetora, e portanto admite uma função inversa, com domínio em $[-1,1]$ e imagem em $[k\cdot\pi,(k+1)\cdot\pi]$. A esta função inversa denominamos **função arco-cosseno**, que a cada $x \in [-1,1]$ associa o arco cujo cosseno é x, e a denotamos por:

$$\begin{array}{rccc} \arccos: & [-1,1] & \to & [k\cdot\pi,(k+1)\cdot\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$

Novamente, a fim de simplificar nossos estudos, vamos restringir nossa atenção para o caso em que $k = 0$. Para obtermos o gráfico desta função, usamos o **teorema 86** das Notas de Aulas da Semana 1, refletindo o gráfico da função cosseno restrita ao intervalo $[0, \pi]$, representado abaixo em vermelho, pela bissetriz do primeiro quadrante, obtendo a curva em azul:



O gráfico da função arco-cosseno tem, portanto, o seguinte aspecto:



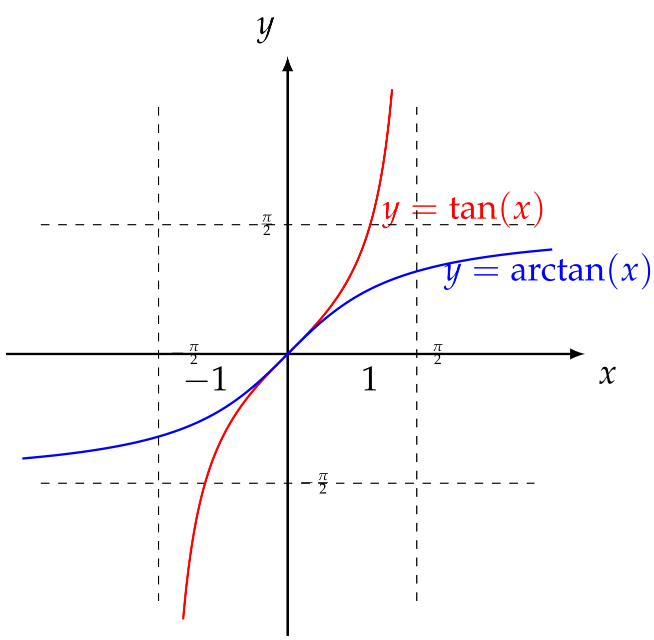
Para todo $k \in \mathbb{Z}$, a função:

$$\begin{array}{rccc} \tan: & \left[k \cdot \pi - \dfrac{\pi}{2}, k \cdot \pi + \dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

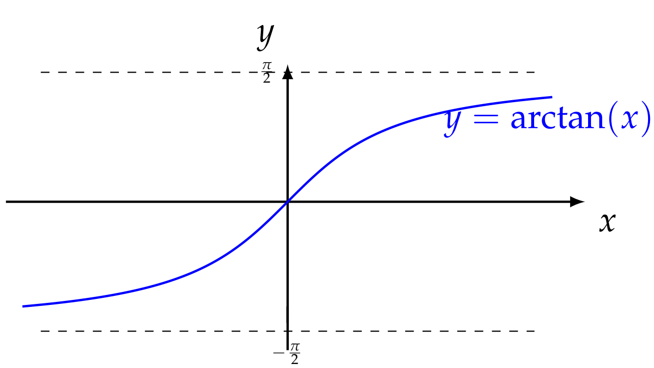
é bijetora, e portanto admite uma função inversa, com domínio em $\mathbb{R}$ e imagem em $\left[k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right]$. A esta função inversa denominamos **função arco-tangente**, que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o arco cuja tangente é x, e a denotamos por:

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & \mathbb{R} & \to & \left[k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$

Mais uma vez, a fim de simplificar nossos estudos, vamos restringir nossa atenção para o caso em que $k = 0$. Para obtermos o gráfico desta função, usamos o **teorema 79** da Aula 1, refletindo o gráfico da função tangente restrita ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, representado abaixo em vermelho, pela bissetriz do primeiro quadrante, obtendo a curva em azul:



O gráfico da função arco-tangente tem o seguinte aspecto:



O domínio e a imagem (conforme o caso) das funções inversas acima são escolhidas de modo que as funções satisfaçam as seguintes relações:

Observação 25. *As funções inversas das restrições convenientes da cossecante, secante e cotangente, isto é, $y = \operatorname{arccsc}(x)$, $y = \operatorname{arcsec}(x)$ e $y = \operatorname{arccot}(x)$ podem ser expressas em função das outras três, respectivamente. Assim, tem-se sempre:*

$$\operatorname{arccsc}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \ \operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \ e \ \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Atividade: Encontrar o domínio de cada uma das funções ciclométricas acima.

5 Modelagem usando as Funções Seno e Cosseno: Regressão Senoidal

Vamos utilizar os conhecimentos desenvolvidos até aqui para modelar um fenômeno natural relacionado aos oceanos, qual seja, o fenômeno das marés.

Suponhamos que, em certo porto, a maré alta ocorra ao meio-dia (0:00pm), quando a profundidade do mar no ponto de aferição é de 5m, e a maré baixa ocorra às 4:00pm, quando a profundidade do mar no ponto de aferição é de 1m.

Objetivo: obter uma variação da função seno que expresse h, a profundidade do mar no ponto de aferição em metros, em termos do instante t, medido em horas desde a meia-noite.

Desejamos uma função do tipo:

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,24] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d \end{array}$$

Primeiramente, sabemos que a função h deverá ser estritamente decrescente no intervalo $[12, 16]$, variando de 5m (em $t = 12h$) até 1m (em $t = 16h$). Assim, tem-se:

$$h_{\text{máx}} = h(12) = 5m$$

$$h_{\text{mín}} = h(16) = 1m$$

O nível médio da água será, portanto:

$$\frac{5m + 1m}{2} = 3m.$$

A variação absoluta no nível da água é $h_{\text{máx}} - h_{\text{mín}} = 5m - 1m = 4m$. Desta forma, pode-se concluir que o parâmetro a, correspondente à amplitude, é $3m$. Assim,

$$h(t) = 2 \cdot \sin(b \cdot t + c) + 3$$

Para determinarmos o parâmetro b, devemos analisar o *período* do fenômeno: sabemos que o nível da água varia do mínimo (1m) ao máximo (5m) no decorrer de 4h. No entanto, o ciclo só estará completo quando o nível voltar ao seu valor mínimo, o que ocorrerá 4h após ter atingido o seu valor máximo – ou seja, às 8:00pm. O ciclo tem, assim, uma duração de 8h.

Para determinar o valor de b, deveremos ter em conta que o período de h deverá ser de 8h.

Vimos, na seção anterior [itens (1), (2) e (3)], que o período da função:

$$h(t) = 2 \cdot \sin(b \cdot t + c) + 3$$

é igual ao período da função:

$$f(t) = \sin(b \cdot t),$$

que por sua vez é igual [pelo item (4)] a:

$$\frac{2\pi}{b}.$$

Desta forma, ao impormos

$$\frac{2\pi}{b} = 8,$$

chegamos à conclusão de que $b = \pi/4$, de modo que h deve ter o aspecto:

$$h(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t + c\right) + 3$$

Resta-nos determinar o parâmetro c (a "constante de fase" do fenômeno). Para tanto, utilizaremos as informações de que $h(12) = 5$ e $h(16) = 1$. Temos, assim:

$$\begin{cases} 5 = h(12) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 12 + c\right) + 3 \\ 1 = h(16) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 16 + c\right) + 3 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 5 = 2 \cdot \sin(3 \cdot \pi + c) + 3 = 2 \cdot \sin((\pi + c) + 2\pi) + 3 = 2 \cdot \sin(\pi + c) + 3 = -2 \cdot \sin(c) + 3 \\ 1 = 2 \cdot \sin(4 \cdot \pi + c) + 3 = 2 \cdot \sin(c + 2 \cdot (2\pi)) + 3 = 2 \cdot \sin(c) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = -2\sin(c) + 3 \\ 1 = 2\sin(c) + 3 \end{cases}$$

Das igualdades acima, concluímos que $\sin(c) = -1$. O primeiro valor de $c > 0$ para o qual isto ocorre é $c = \frac{3\pi}{2}$. Assim, a função que modela o fenômeno é, portanto:

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,24] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 \end{array}$$

Note que:

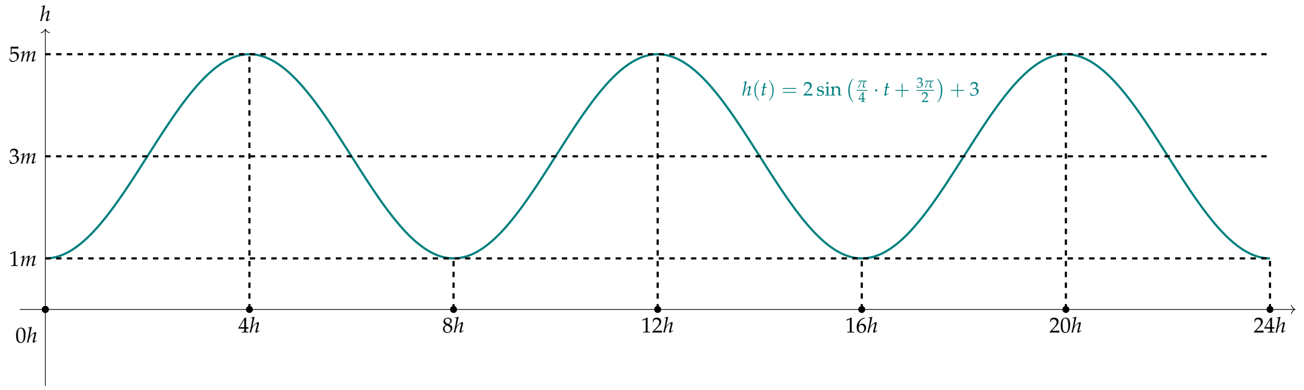
$$\begin{aligned} h(12) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 12 + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 = 2 \cdot \sin\left(3\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 = \\ = 2 \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) + 3 = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5m \end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned} h(16) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 16 + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 = 2 \cdot \sin\left(4\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 = \\ = 2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 3 = 2 \cdot (-1) + 3 = 1m, \end{aligned}$$

de modo que a função satisfaz as condições desejadas.

Munidos desta função, somos capazes de "prever" o nível da água do mar em qualquer horário do dia. Por exemplo, podemos inferir que as marés altas ocorrem às 4h, às 12h e às 20h, enquanto que as marés baixas ocorrem à meia-noite, às 8h, às 16h.



Passemos agora à modelagem de outro fenômeno natural periódico, qual seja, a duração do período de luz solar em um dia ao longo de um ano.

No hemisfério sul da Terra, o solstício de inverno – ou seja, o dia mais curto do ano de 2021 – ocorrerá em 21 de junho, enquanto que o solstício de verão – ou seja, o dia mais longo do ano – ocorrerá em 21 de dezembro. De acordo com o sítio https://dateandtime.info/pt/citysunrisesunset.php?citysunrise_article=S%C3%A3o+Paulo, o número de horas de luz solar na cidade de São Paulo em 21 de junho de 2021 será de 10 horas, 41 minutos e 4 segundos, e o número de horas de luz solar em 21 de dezembro de 2021 será de 13 horas, 35 minutos e 24 segundos. Isto significa que o número mínimo de horas com luz solar ocorrerá no 172^o dia do ano, enquanto que o número máximo de horas com luz solar ocorrerá no 355^o dia do ano.

Vamos determinar um modelo trigonométrico para "prever" o número de horas de luz solar em função do número de dias do ano decorridos desde 01^o de janeiro de 2021.

Denotemos por y o tempo decorrido, em dias, desde 01^o de janeiro, e por $y(t)$ a duração do dia t. A função terá o aspecto:

$$\begin{array}{rccc} y: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & a\cdot\sin(b\cdot t + c) + d \end{array}$$

Primeiramente precisamos converter as durações dos dias para a base decimal:

$$\begin{cases} 10h41\text{min}4\text{s} = \left(10 + \dfrac{41}{60} + \dfrac{4}{3600}\right)h = \dfrac{2404}{225}h \approx 10.68h \\ 13h35\text{min}24\text{s} = \left(13 + \dfrac{35}{60} + \dfrac{24}{3600}\right)h = \dfrac{1359}{100}h = 13.59h \end{cases}$$

A *amplitude* da função é igual à diferença entre o número máximo de horas de luz solar e o número mínimo, dividida por 2:

$$a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{13.59 - 10.68}{2} = \frac{2.91}{2} = 1.455$$

A constante d corresponderá ao número médio de horas dos dias do ano de 2021, ou seja:

$$d = \frac{13.59 + 10.68}{2} = \frac{2427}{200} = 12.135h$$

A função, portanto, terá o aspecto:

$$y(t) = 1.455 \cdot \sin(b \cdot t + c) + 12.135.$$

O período do fenômeno é a duração do ano solar, que é igual a 365 dias, d 5 horas, 48 minutos e 46 segundos

$$365\text{d}5\text{h}48\text{min}46s = \left(365 + \frac{5}{24} + \frac{46}{86400}\right) d \approx 365.21d$$

e modo que deve valer a relação:

$$\frac{2\pi}{b} = 365.21$$

e portanto:

$$b = \frac{2\pi}{365.21} = \frac{200\pi}{36521}$$

A função, portanto, tem a forma:

$$y(t) = 1.455 \cdot \sin\left(\frac{200\pi \cdot t}{36521} + c\right) + 12.135$$

Resta-nos determinar, finalmente, a constante de fase, c. Para isto, usamos o solstício de inverno, por exemplo:

$$10.68 = y(172) = 1.455 \cdot \sin\left(\frac{200\pi \cdot 172}{36521} + c\right) + 12.135$$

Desta igualdade segue que:

$$-\frac{291}{200} = 1.455 \cdot \sin\left(\frac{200\pi \cdot 172}{36521} + c\right)$$

$$-1 = \sin\left(\frac{200\pi \cdot 172}{36521} + c\right)$$

$$-1 = \sin\left(\frac{34400\pi}{36521} + c\right)$$

Aplicando arco-seno aos dois membros:

$$\arcsin(-1) = \frac{34400\pi}{36521} + c$$

$$c = \frac{3\pi}{2} - \frac{34400\pi}{36521} = \frac{40763\pi}{73042}$$

A função será, portanto,

$$y(t) = 1.455 \cdot \sin\left(\frac{200\pi \cdot t}{36521} + \frac{40763\pi}{73042}\right) + 12.135$$

Vamos comparar valores previstos com valores exatos (tabelados):

26 de abril foi o 116^o dia do ano. De acordo com o nosso modelo, a duração deste dia foi:

$$y(116) = 1.455 \cdot \sin\left(\frac{200\pi \cdot 116}{36521} + \frac{40763\pi}{73042}\right) + 12.135 \approx 11.30463\text{h} \approx 11\text{h}18\text{min}17\text{s} = 11.304h$$