Topologia Algébrica 1 – Prova 3

Nome: ____________________

Número USP: ____________________

Instruções: Resolva os exercícios abaixo. Justifique todas as suas respostas. Você pode consultar livros, cadernos, notas de aulas, anotações, etc..., mas NÃO é permitido consultar a internet ou os/as colegas (ou qualquer outra pessoa). Boa prova!

1. Seja X o espaço projetivo quaternionico $\mathbb{H}P^n$.
   (a) (1 ponto) Descreva uma decomposio celular de X.
   (b) (1 ponto) Calcule, usando teoria de grau de Brouwer, o homomorfismo de bordo d_n do complexo de cadeias celulares $(C_k^{\mathrm{CW}}(X;\mathbb{Z}), d_k)$ associado a esta decomposição celular. (Ou seja, para cada célula e_α^n, descreva $d_n(e_\alpha^k) = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} e_\beta^{k-1}$).
   (c) (0,5 pontos) Calcule os grupos de homologia celular de X, com coeficientes em $\mathbb{Z}$.
   (d) (0,5 pontos) Calcule a característica de Euler $\chi(X)$.

2. Seja X o espaço quociente obtido identificando os dois vértices da suspensão de $S^1 \vee S^1$. Ou seja,
$$X = \frac{(S^1 \vee S^1) \times [-1,1]}{[(S^1 \vee S^1) \times \{-1\}] \cup [(S^1 \vee S^1) \times \{1\}]}$$
   (a) (1 ponto) Faça um desenho de X e descreva no desenho uma decomposiç ao celular.
   (b) (1 ponto) Calcule, usando teoria de grau de Brouwer, o homomorfismo de bordo d_n do complexo de cadeias celulares $(C_k^{\mathrm{CW}}(X;\mathbb{Z}), d_k)$ associado a esta decomposição celular. (Ou seja, para cada célula e_α^n, descreva $d_n(e_\alpha^k) = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} e_\beta^{k-1}$).
   (c) (0,5 pontos) Calcule os grupos de homologia celular de X, com coeficientes em $\mathbb{Z}$.
   (d) (0,5 pontos) Calcule a característica de Euler $\chi(X)$.

3. Seja X o espaço quociente
$$X = \frac{S^1 \times S^1}{S^1 \times \{1\}}.$$
   (a) (1 ponto) Faça um desenho de X e descreva no desenho uma decomposiç ao celular.
   (b) (1 ponto) Calcule, usando teoria de grau de Brouwer, o homomorfismo de bordo d_n do complexo de cadeias celulares $(C_k^{\mathrm{CW}}(X;\mathbb{Z}), d_k)$ associado a esta decomposição celular. (Ou seja, para cada célula e_α^n, descreva $d_n(e_\alpha^k) = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} e_\beta^{k-1}$).
   (c) (0,5 pontos) Calcule os grupos de homologia celular de X, com coeficientes em $\mathbb{Z}$.
   (d) (0,5 pontos) Calcule a característica de Euler $\chi(X)$.

4. Seja $X = S^3/\sim$ onde identificamos $x \in S^2$ (o equador de S^3) com seu antípoda $-x \in S^2$.
   (a) (1 ponto) Descreva uma decomposio celular de X.
   (b) (1 ponto) Calcule, usando teoria de grau de Brouwer, o homomorfismo de bordo d_n do complexo de cadeias celulares $(C_k^{\mathrm{CW}}(X;\mathbb{Z}), d_k)$ associado a esta decomposição celular. (Ou seja, para cada célula e_α^n, descreva $d_n(e_\alpha^k) = \sum_\beta \lambda_{\alpha\beta} e_\beta^{k-1}$).
   (c) (0,5 pontos) Calcule os grupos de homologia celular de X, com coeficientes em $\mathbb{Z}$.
   (d) (0,5 pontos) Calcule a característica de Euler $\chi(X)$.
5. (Bonus: 1 ponto) Explique porque é óbvio, e toda criança sabe os grupos de homologia de S^n :)