Topologia Algébrica 1 – Prova 2

Nome: ____
Número USP: ____

<u>Instruções Pós-Graduação:</u> Escolha os pontos dentre os itens abaixo que deseja resolver na sala de aula. Escolha no máximo 6 pontos para fazer em casa e entregar no início da aula do dia 04/11. Os exercícios feitos em casa valem metade de seus pontos (e portanto o máximo possível que se pode obter com exercícios feitos em casa é 3). Cada exercício só pode ser entregue uma vez.

<u>Instruções Graduação:</u> Escolha os pontos dentre os itens abaixo que deseja resolver na sala de aula. Escolha no máximo 5 pontos para fazer em casa e entregar no início da aula do dia 04/11. Cada exercício só pode ser entregue uma vez. (Nota Max em casa = 5)

Você pode consultar livros, cadernos, notas de aulas, anotações, etc..., mas <u>NÃO é permitido consultar a internet ou os/as colegas (ou qualquer outra pessoa).</u> INCLUSIVE NA PARTE FEITA EM CASA!!

1. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique (de forma sucinta) as suas respostas.
   (a) (1 ponto) Se $\mathcal{K}$ é uma pseudo-variedade fechada e irredutível de dimensão $n \geq 3$, e seja v um 0-simplexos de $\mathcal{K}$, então $H_1(|\mathcal{K}|) \simeq H_1(|\mathcal{K}| - \{v\})$.
   (b) (0,5 ponto) Os números de Betti de um complexo simplicial finito são independentes da escolha do corpo.
   (c) (1 ponto) Se M é uma superfície topológica (uma variedade de dimensão 2 sem bordo) compacta e conexa, então $\chi(M) \leq 2$.

2. Sejam $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ pseudo-variedades irredutíveis, fechadas, n-dimensionais, orientadas, contidas em $\mathbb{R}^N$. Supunha que $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ consiste de um único n-simplexo σ, e que as orientações sobre σ são opostas. Considere a soma conexa $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2 = (\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) - \mathrm{int}(\sigma)$.
   (a) (1,5 pontos) Calcule os grupos de homologia de $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ em termos dos grupos de homologia de $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$.
   (b) (0,5 pontos) Calcule o numero de Euler de $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$ em termos dos números de Euler de $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$.

3. Seja $\mathbb{RP}^n$ o espaço projetivo real de dimensão n.
   (a) (1,5 pontos) Calcule os grupos de homologia singular $H_k(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$ para todo k.
   (b) (0,5 pontos) Determine o número de Euler de $\mathbb{RP}^n$.

4. Seja X um espaço topológico.
    (a) (1 ponto) Mostre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$, onde ΣX denota a suspensão de X.
    (b) (1 ponto) Construa explicitamente uma aplicação de cadeias $s : C_n(X) \to C_{n+1}(\Sigma X)$ que induz o isomorfismo (se ajudar pode assumir que X é triangulável e fazer isso para o complexo de cadeias simplicias de X).

5. Sabendo que se n é par, então $H_0(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, e $H_k(\mathbb{RP}^n, \mathbb{R}) = 0$ se $k \geq 1$, mostre que:
    (a) (0,5 pontos) Se n é par, então toda aplicação $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ tem ponto fixo.
    (b) (1 ponto) Dê uma demonstração topológica do seguinte fato: se n é ímpar, então todo isomorfismo linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tem pelo menos um autovetor.

6. Calcule os grupos de homologia singular dos seguintes espaços:
    (a) (1 ponto) X é um torus com quatro discos preenchidos (figura 1).

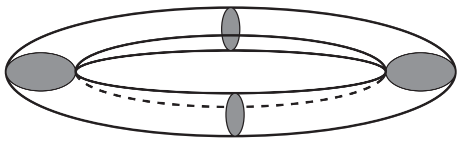

Figura 1: Torus com quatro discos preenchidos.

    (b) (2 pontos) $X = \Sigma T^2 / \sim$ é o quociente da suspensão do Torus $\Sigma T^2 = Con_v(T^2) \cup Con_{-v}(T^2)$ pela relação de equivalência que identifica os dois vértices v e $-v$. (Ou equivalentemente os pontos $[x, 1] \sim [y, -1]$, $x, t \in T^2$).