Topologia Algébrica 1 – Prova 1

Nome: ____________________

Número USP: ____________________

<u>Instruções Pós-Graduação:</u> Escolha os pontos dentre os itens abaixo que deseja resolver na sala de aula. Escolha no máximo 6 pontos para fazer em casa e entregar no início da aula do dia 21/09. Os exercícios feitos em casa valem metade de seus pontos (e portanto o máximo possível que se pode obter com exercícios feitos em casa é 3). Cada exercício só pode ser entregue uma vez.

<u>Instruções Graduação:</u> Escolha os pontos dentre os itens abaixo que deseja resolver na sala de aula. Escolha no máximo 5 pontos para fazer em casa e entregar no início da aula do dia 21/09. Cada exercício só pode ser entregue uma vez. (Nota Max em casa = 5)

Você pode consultar livros, cadernos, notas de aulas, anotações, etc..., mas <u>NÃO é permitido consultar a internet ou os/as colegas (ou qualquer outra pessoa).</u>

1. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique (de forma sucinta) as suas respostas.
   (a) (1 ponto) Se $p : E \to B$, e $p' : E' \to B'$ são recobrimentos com E e E' homotopicamente equivalentes, então B e B' são homotpicamente equivalentes.
   (b) (1 ponto) Se $p : E \to B$, e $p' : E' \to B'$ são recobrimentos universais com B e B' homotopicamente equivalentes, então E e E' são homotpicamente equivalentes.
   (c) (1 ponto) Se M e N são variedades topológicas de dimensão $n \geq 3$, então
   $$\pi_1(M\#N, [x]) = \pi_1(M, x) * \pi_1(N, x')$$
   onde $[x] = [x']$ em $M\#N$.
   (d) (1 ponto) Existe um recobrimento de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.
   (e) (1 ponto) Existe um recobrimento do Torus T^2 na garrafa de Klein K.
2. Considere $\mathbb{Z}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \subset \mathbb{C}$, e
   $$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \subset \mathbb{C}^2 : ||(z_1, z_2)|| = 1\}.$$
   Obtemos assim uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_n$ em $\mathbb{S}^3$ dada por
   $$z \cdot (z_1, z_2) = (zz_1, zz_2).$$

(a) (1 ponto) Seja L_n os espaço quociente da ação acima (esse espaço é conhecido com espaço de lens - ou lenticular em português). Mostre que L_n é uma variedade topológica de dimensão 3 e determine seu grupo fundamental.

(b) (1 ponto) Calcule o grupo fundamental do espaço $X = (L_n \times D^2) - \{p\}$, onde p é um ponto que não pertence a fronteira $\partial X = L_n \times \partial D^2$ de X.

3. (1 ponto) Seja D_4 o grupo dihedral de simetrias de um quadrado. Dê um exemplo de um espaço topológico X tal que $\pi_1(X, x) = D_4$. (Dica: descreva D_4 em termos de geradores e relações e cole 2-células em bouquets de círculos).

4. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços:

(a) (1 ponto) O espaço X que consiste de uma esfera, uma haste (1-dimensional) que passa por dentro da esfera através dos polos norte e sul e conecta em um cilindro, conforme indicado na figura 1.

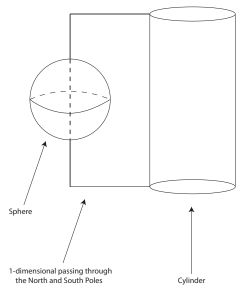

Figura 1: Exercise 5(d)

(b) (1 ponto) $X = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$, onde identificamos $\mathbb{R}^k$ com o conjunto

$$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

onde $0 \leq k < n$.

(c) (1 ponto) X é um torus com quatro discos preenchidos (figura 2).

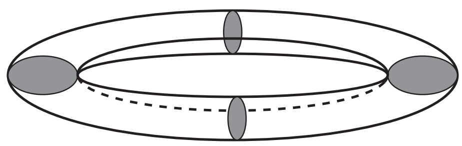

Figura 2: Torus com quatro discos preenchidos.

5. Seja T^2 um torus, e K a garrafa de Klein. Sejam p_1, p_2 pontos distintos de T^2 e q_1, q_2 pontos distintos de K.

(a) (1 ponto) Mostre que $T^2 - \{p_1\}$ é homotopicamente equivalente à $K - \{q_1\}$.

(b) (1 ponto) Mostre que $T^2 - \{p_1, p_2\}$ n ao é homotopicamente equivalente à $\mathbb{P}^2 - \{q_1, q_2\}$. (Dica: calcule seus grupos fundamentais).