Topologia Algébrica I – Lista de Exercícios 4

1 Homologia Singular

1. Mostre que X é conexo é conexo por caminhos se e somente se $H_0(X; R) \simeq R$.

2. Encontre a sequencia longa exata do par e a sequencia de Mayer-Vietoris para homologia reduzida. Descreva os morfismos de conexão ∂_* explicitamente.

3. Enuncie e demonstre o Lema do cinco.

4. Mostre que se (X, A, B) é uma tripla de espaços topológicos, então existe uma sequencia longa exata em homologia

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots .$$

   Descreve o morfismo de conexão explicitamente e mostre que ele é natural.

5. Utilize a sequencia longa do par $(D^n, \partial D^n)$ para calcular os grupos de homologia da esfera.

6. Mostre que se $A \subset X$ é um retrato, então $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ é injetor.

7. Mostre que ∂D^n não é uma retração de D^n. Conclua que toda aplicação contínua $f : D^n \to D^n$ tem ponto fixo.

8. Decida se toda função contínua $f : \mathrm{int}(D^n) \to \mathrm{int}(D^n)$ tem ponto fixo. Prove ou dê um contra exemplo.

9. Seja $Con(A) = A \times I / A \times \{0\}$ o cone sobre A. Mostre que $H_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X \cup Con(A))$.

10. Sejam X_α espaços topológicos e seja $X = \vee_\alpha X_\alpha$. Suponha que os pontos $x_\alpha \in X_\alpha$ identificados no produto wedge acima sejam tais que (X_α, x_α) é um bom par para todo α. Mostre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \oplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha)$.

11. Mostre que homotopia de cadeias define uma relação de equivalência no conjunta das aplicações de cadeia entre dois complexos de cadeia.

12. Mostre que $H_0(X, A) = 0$ se e somente se A intersecta todas as componentes conexas por caminhos de X.

13. Mostre que $H_1(X, A) = 0$ se e somente se $H_1(A) \to H_1(X)$ é sobrejetora, e cada componente conexa por caminhos de X contém no máximo uma componente conexa por caminhos de A.

14. Calcule $H_n(X, A)$ quando:

(a) $X = S^2$ e A é um conjunto finito de pontos.

(b) $X = S^{\times}S^1$ e A é um conjunto finito de pontos.

(c) $X = T\#T$ e A é o circulo S^1 usado para fazer a identificação da soma conexa.

(d) $X = T\#T$ e A é um circulo $S^1 \times \{1\}$ contido em um dos dois torus. (veja figura na página 132 do livro do Hatcher)

15. Mostre que $\tilde{H}_n(X) \simeq \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$. Construa explicitamente uma aplicação de cadeias $s : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ que induz o isomorfismo.

16. Seja $f : (X, A) \to (Y, B)$ uma aplicação de pares de espaços topológicos tal que $f : X \to Y$, e $f : A \to B$ são equivalências de homotopia. Mostre que $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ é um isomorfismo.

17. Seja $f : (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, D^n - 0)$ a inclusão. Decida se f é uma equivalência de homotopia de pares, i.e., se existe $g : (D^n, D^n - 0) \to (D^n, S^{n-1})$ tal que fg e gf são homotópicos à identidade através de aplicações de pares.

18. Mostre que todos os grupos de homologia de T^2 e $S^{\vee}S^1 \vee S^2$ coincidem, mas que esses espaços não são homotopicamente equivalentes.

19. Mostre que se M é uma superfície topológica (uma variedade de dimensão 2 sem bordo) compacta e conexa, então $\chi(M) \leq 2$.

20. Defina o espaço projetivo quaterniônico e calcule seus grupos de homologia.

21. Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{RP}^n$ com coeficientes em $\mathbb{Z}^2$. Determine o número de Euler de $\mathbb{RP}^n$.

22. Faça os exercícios da página 184 do livro do Hatcher.