Topologia Algébrica I – Lista de Exercícios 2

1 Grupo Fundamental

1. Dados dois caminhos γ_1 e γ_2 de p à q em X, mostre que os homomorfismos associados

$$A_{\gamma_i} : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q)$$

coincidem ($A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$) se e somente se $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}]$ pertence ao centro de $\pi_1(X,p)$ (i.e., comuta com todos os elementos).

2. Mostre que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ não são homeomorfos.

3. Dê um exemplo de uma função sobrejetora (respectivamente injetora) contínua de X em Y, tal que $f_\sharp : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$ não é sobrejetora (respectivamente injetora).

4. Mostre que uma retração sempre induz uma aplicação sobrejetora entre os grupos fundamentais.

5. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ e considere a aplicação

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(nx+my)}, e^{2\pi i(px+qy)}),$$

com $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

   (a) Determine a aplicação induzida no grupo fundamental.

   (b) Mostre que f é homeomorfismo se e somente se é equivalência de homotopia.

   (c) Depermine para quais valores de m, n, p, q que f é um homeomorfismo.

2 Recobrimentos

6. (a) Mostre que existe um recobrimento do Torus $\mathbb{T}^2$ na garrafa de Klein K.

   (b) Calcule o grupo fundamental de K. (Tente fazer isso diretamente usando a letra (c) abaixo. Isto pode ser complicado..... se no conseguir no se desespere! Espere e faça isso usando o teorema de Seifert - van Kampen)

   (c) Mostre que K pode ser obtido de $\mathbb{R}^2$ como quociente por uma ação propriamente descontnua de um grupo.

7. Mostre que um recobrimento conexo $P : E \to B$ de um espaço simplesmente conexo B é um homeomorfismo.

8. Mostre que se $\tilde{B}$ é um recobrimento simplesmente conexo de um espaço B, e se E é um recobrimento (conexo) qualquer de B, então existe um recobrimento $p : \tilde{B} \to E$.

9. A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser obtida de $\mathbb{R}^n$ como quociente por uma ação propriamente descontínua de um grupo G? E o espaço projetivo real $\mathbb{P}^n$?

10. Seja $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ o recobrimento de n folhas $f_n(z) = z^n$. Decida para quais valores de m e n existe um levantamento de $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ para o recobrimento f_n (veja o diagrama abaixo).

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "f_n"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur] \arrow[r, "f_m"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

11. Seja M uma variedade topológica de dimensão n.
    (a) Suponha que G age propriamente descontinuamente em M e satisfaz a seguinte propriedade adicional: se $x, x' \in M$ não estão na mesma órbita de G, então existe uma vizinhança U de x e uma vizinhança U' de x' tais que $U \cap U' = \emptyset$. Mostre que M/G é uma variedade topológica de dimensão n.
    (b) Mostre que a condição adicional acima é necessária.
    (c) Mostre que se G é um grupo finito, então a condição adicional acima é automaticamente satisfeita.
    (d) Mostre que se G é um grupo finito que age livremente em M, então a ação é propriamente descontínua.
    (e) Mostre que se $p : E \to M$ é um recobrimento, então E é variedade topológica de dimensão n.

12. Encontre um recobrimento simplesmente conexo, e calcule o grupo fundamental dos seguntes espaços.
    (a) X = colar de n pérolas (figura 1). Aqui X é o espaço obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.
    (b) X é um torus com quatro discos preenchidos (figura 2).

    Dica: Pense no recobrimento $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

13. Mostre que existe um recobrimento $p : \mathbb{T}_3 \to \mathbb{T}_2$ do 3-Torus $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\mathbb{T}$ no 2-Torus $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}$. (Dica: procure uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{T}_3$). Observação: Note que isso mostra que $\pi_1(\mathbb{T}_3, x)$ e um subgrupo de $\pi_1(\mathbb{T}_2, y)$. Isto pode ser um pouco anti-intuitivo já que $\mathbb{T}_3$ "tem mais buracos que" $\mathbb{T}_2$.

14. Mostre que existe um homomorfismo injetor $\pi(\mathbb{T}_{11}, x) \to \pi(\mathbb{T}_3, p)$, onde $\mathbb{T}_g$ a soma conexa de g Tori. (DICA: considere $\mathbb{T}_{11}$ como na figura 3).

15. Seja $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a aplicação $f_m(z) = z^m$, com $m \in \mathbb{N}$. Seja $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ a aplicação quociente (pela relação de equivalência que identifica os pontos antípodas da esfera). Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Dê uma prova <u>curta</u> ou um contra-exemplo.

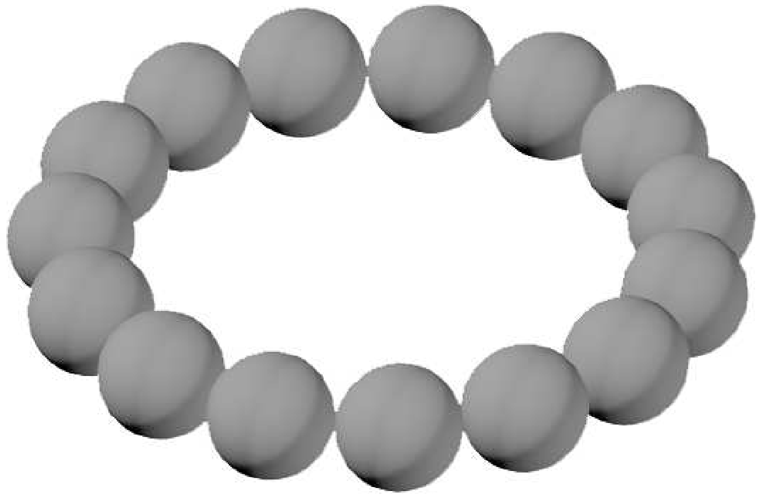

Figura 1: Colar de Pérolas.

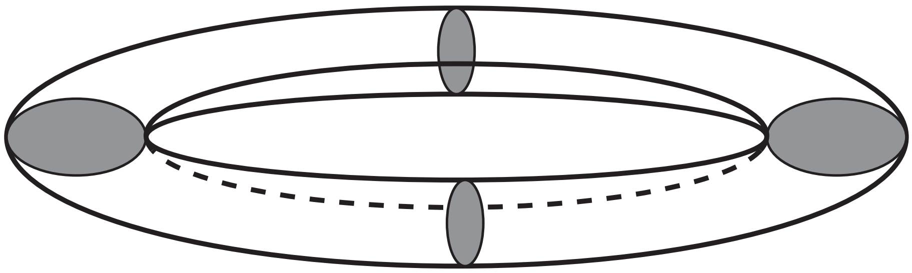

Figura 2: Torus com quatro discos preenchidos.

(a) Se $n \geq 2$, então toda aplicação $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^1$ admite um levantamento para o recobrimento $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

(b) Se $n \geq 2$, e $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^n$ admite um levantamento $\tilde{\phi} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$, então ϕ se extende a uma aplicação do disco $\bar{\phi} : D^2 \to \mathbb{P}^n$.

3 O Teorema de Seifert - van Kampen

16. Sejam M_1 e M_2 duas variedades de dimensão n. Mostre que se $n \geq 3$, então

$$\pi_1(M_1 \# M_2, [x]) \simeq \pi_1(M_1, x) * \pi_1(M_2, y).$$

O que se pode dizer quando $n = 2$?

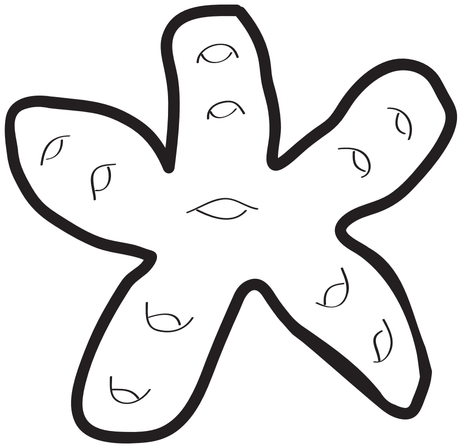

Figura 3: $\mathbb{T}_{11}$.

17. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços (Não necessariamente usando van Kampen! Escolha a melhor forma):
    (a) $X = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, \text{ or } y = 0, \text{ or } z = 0\}$, i.e., o espaço obtido removendo os três eixos de $\mathbb{R}^3$.
    (b) O espaço projetivo real de dimensão 3
    $$\mathbb{P}^3 = \{l \subset \mathbb{R}^4 : l \text{ é uma reta pela origem}\}.$$
    (c) O produto wedge de dois Tori (figura 4).

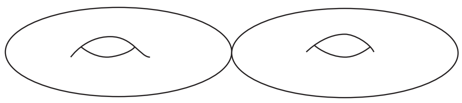

Figura 4: $\mathbb{T} \vee \mathbb{T}$.

    (d) O espaço X que consiste de uma esfera, uma haste (1-dimensional) que passa pelos polos norte e sul da esfera e conecta em um cilindro, conforme indicado na figura 5.

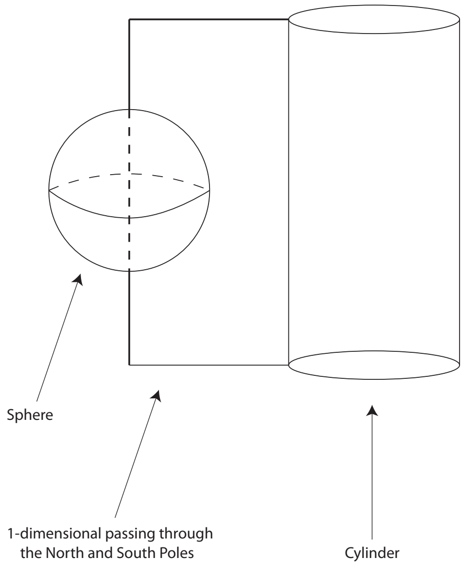

Figura 5: Exercise 5(d)

(e) O espaço quociente obtido identificando os vértices de um quadrado, i.e., $[0,1] \times [0,1]/A$, onde

$$A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

(f) Uma corrente de quatro círculos, obtido de quatro cópias de $\mathbb{S}^1$ e identificando elas dois a dois conforme a figura 6.

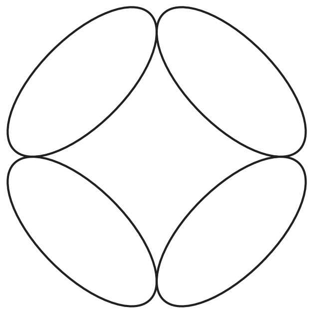

Figura 6: Corrente de 4 círculos.

(g) O colar de pérolas com cordão, i.e., o colar de n pérolas da lista de exercícios anterior junto com um $\mathbb{S}^1$ que passa por dentro das esferas intersectando cada esfera exatamente nos pontos que são usados para colar uma esfera na outra. De forma mais abstrata, se o colar de pérolas é descrito como o espaço X obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$ (figura 1), então o colar de pérolas com cordão é

$$(X \sqcup \mathbb{S}^1)/\sim,$$

onde $[p_k] \in X \sim e^{\frac{2k\pi i}{n}} \in \mathbb{S}^1$, com $k = 1, \ldots, n$.

(h) $X = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0;\ \text{ou } y = 0 \text{ e } z = 0;\ \text{ou } x = 0 \text{ e } z = 0\}$, i.e., o espaço obtido removendo os três eixos de $\mathbb{R}^3$.

(i) O colar do professor Odilon composta por $n+1$ "missangas": uma esfera $\mathbb{S}^2$, um Torus $\mathbb{T}^2$, um 2-Torus $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$, ... , um n-Torus $\mathbb{T}^2_n = \mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2$ (n-vezes).

18. Seja X um espaço topológico. A suspensão de X é definida por

$$\Sigma X = (X \times [-1,1])/\sim,$$

onde $\sim$ é a menor relação de equivalência tal que $(x,1) \sim (y,1)$, e $(x,0) \sim (y,0)$ para todo $x, y \in X$. (Este espaço também é chamado de cone duplo sobre X)

(a) Mostre $\Sigma\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

(b) Mostre que se X é conexo por arcos, então ΣX é simplesmente conexo.

(c) Mais geralmente, qual a relação entre o número de componentes conexas por arcos de X e $\pi_1(\Sigma X, x)$?

19. Seja $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Encontre uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_n$ em $\mathbb{S}^3$.

(b) Mostre que $L_n = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n$ é uma variedade topológica.

(c) Seja $Cil(L_n) = L_n \times [0,1]$. Calcule $\pi_1(Cil(L_n) - \{p\}, x)$, onde p é um ponto de $Cil(L_n)$ que <u>**NÃO**</u> pertence à fronteira $L_n \times \{0\} \cup L_n \times \{1\}$.

20. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços:

(a) $X = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$, onde identificamos $\mathbb{R}^k$ com o conjunto

$$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

onde $0 \leq k < n$.

(b) (1 ponto) O colar X da figura 7, obtido da seguinte forma: Tome 3 esferas $\mathbb{S}^2_i$, com $i = 1,2,3$, e 2 círculos $\mathbb{S}^1_1$ e $\mathbb{S}^1_2$. Sejam N_i e S_i os polos norte e sul de $\mathbb{S}^2_i$, x_1, x_2, x_3 as raízes cúbicas da unidade em $\mathbb{S}^1_1$, e y_1, y_2, y_3 as raízes cúbicas da unidade em $\mathbb{S}^1_2$. Então

$$X = (\mathbb{S}^2_1 \sqcup \mathbb{S}^2_2 \sqcup \mathbb{S}^2_3 \sqcup \mathbb{S}^1_1 \sqcup \mathbb{S}^1_2)/\sim,$$

onde $\sim$ é a menor relação de equivalencia tal que

$$x_i \sim N_i, \text{ e } y_i \sim S_i \text{ para todo } i = 1,2,3.$$

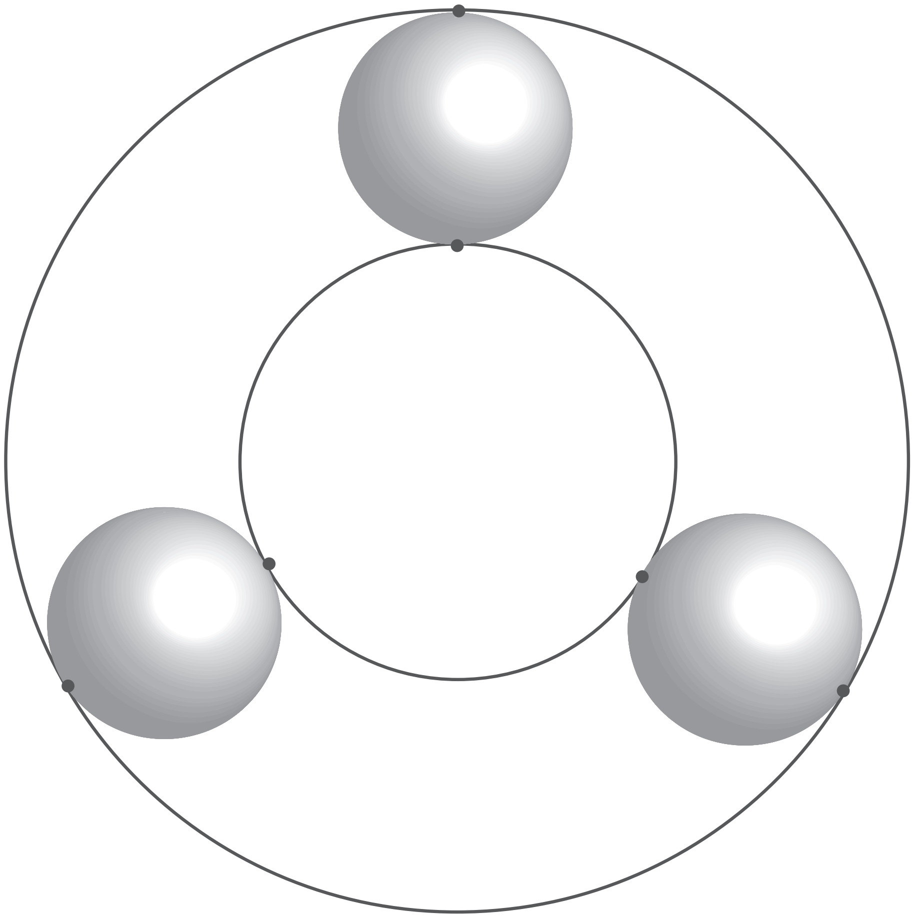

Figura 7: Colar X do Exerccio 6.(b)