

1 Um Pouco de Topologia e Variedades Topológicas

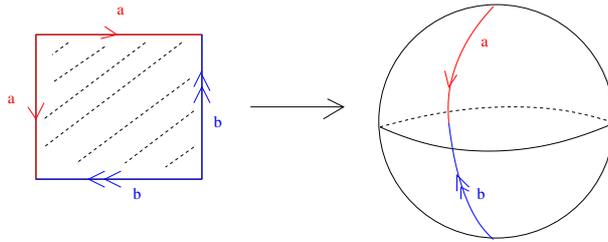
1. Uma **variedade topológica de dimensão n** é um espaço topológico M segundo contável e Hausdorff que é *localmente euclidiano de dimensão n* , ou seja, tal que para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de x e um homeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Seja \mathbb{S}^2 a esfera bidimensional que é definida como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 1. Ou seja, se denotarmos o intervalo $[0, 1]$ por I , então

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y) \in I \times I\} / \sim$$

onde identificamos $(0, y) \sim (1 - y, 1)$, e $(x, 0) \sim (1, 1 - x)$.



The sphere obtained from a square glueing as indicated in the picture

Figura 1: Esfera

- (a) Mostre que \mathbb{S}^2 é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.
 (b) Mostre que \mathbb{S}^2 é homeomorfo à esfera redonda usual:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.\}$$

2. Seja \mathbb{T}^2 o torus, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 2. Ou seja,

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \in I \times I\} / \sim$$

onde identificamos $(0, y) \sim (1, y)$, e $(x, 0) \sim (x, 1)$.

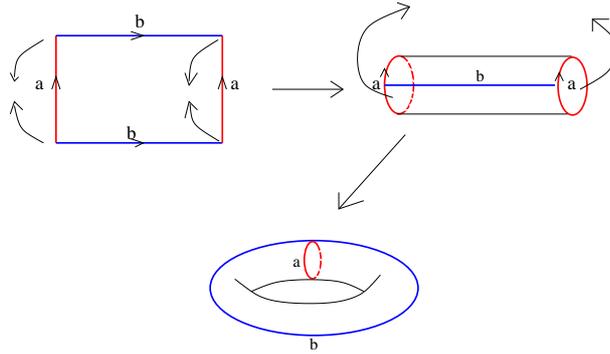


Figura 2: Torus

- (a) Mostre que \mathbb{T}^2 é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.
 (b) Mostre que \mathbb{T}^2 é homeomorfo ao produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde \mathbb{S}^1 denota o círculo redondo:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1.\}$$

3. Seja \mathbb{P}^2 o plano projetivo, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 3. Ou seja,

$$\mathbb{P}^2 = \{(x, y) \in I \times I\} / \sim$$

onde identificamos $(0, y) \sim (1, y)$, e $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$.

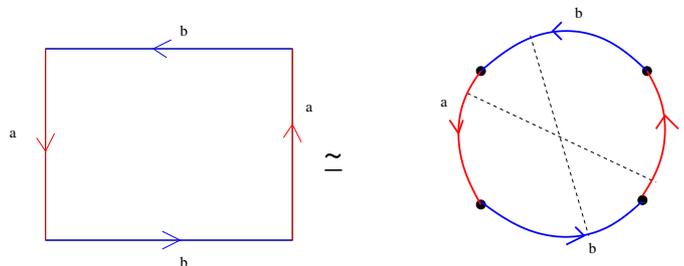


Figura 3: Plano Projetivo

Denote por $D \subset \mathbb{R}^2$ o disco fechado de raio 1.

- (a) Mostre que \mathbb{P}^2 é homeomorfo ao espaço obtido identificando a fronteira $\partial D = \mathbb{S}^1$ de D através da aplicação antípoda (Figura 4)

$$A : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad A(x, y) = (-x, -y).$$

- (b) Mostre que \mathbb{P}^2 é homeomorfo ao espaço obtido identificando um ponto p na esfera redonda padrão com seu anípoda $-p$.

- (c) Mostre que \mathbb{P}^2 é homeomorfo ao espaço das retas que passam pela origem em \mathbb{R}^3 . A topologia deste espaço de retas pode ser descrita como a topologia gerada pela seguinte base \mathcal{B} de abertos: $U \in \mathcal{B}$ se e somente se existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que para todo $l_1, l_2 \in U$, o ângulo entre l_1 e l_2 é menor que θ . (OBS: Uma descrição equivalente é tomar $\mathbb{R}^3 - 0 / \sim$ onde $v \sim w$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda w$ (prove isso!))
- (d) Mostre que \mathbb{P}^2 é uma superfície.

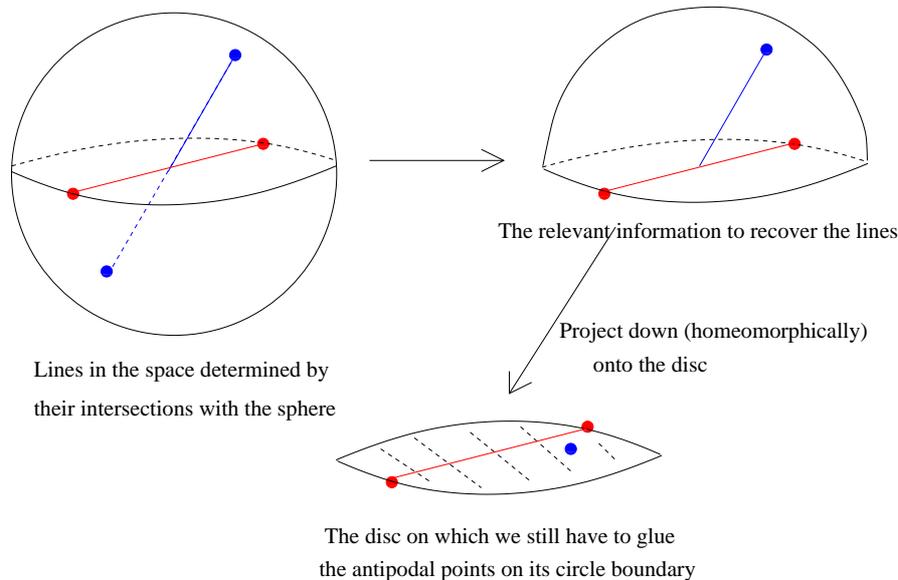


Figura 4: Plano Projetivo

4. Entenda a definição da soma conexa de duas variedades topológicas. (Procure em qualquer uma das referências para este curso, ou nas notas de aula disponibilizadas na referência 4)
5. (a) Seja Σ uma superfície qualquer. Mostre que $\Sigma \# \mathbb{S}^2$ é homeomorfo à Σ .
(b) O mesmo é verdade para $M \# \mathbb{S}^n$, onde M é uma variedade de dimensão n qualquer?
6. Construa em \mathbb{S}^3 , 3 campos de vetores que sejam linearmente independentes em todos os pontos. (Dica: pense em \mathbb{S}^3 com os quaternions de norma 1)
7. Seja

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \ell \text{ é um subespaço com } \dim_{\mathbb{C}} \ell = 1\},$$

ou seja, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, o espaço projetivo complexo, é o espaço das retas complexas (dimensão real 2) de \mathbb{C}^{n+1} .

- (a) Mostre que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$, onde $(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n)$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $(z_0, \dots, z_n) = (\lambda z'_0, \dots, \lambda z'_n)$.
- (b) Mostre que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é homeomorfo a um quociente de \mathbb{S}^{2n+1} por uma ação de \mathbb{S}^1 .

- (c) Mostre que $\mathbb{C}P^n$ é uma variedade topológica de dimensão $2n$.
- (d) Mostre que $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$.
- (e) Mostre que $\mathbb{C}P^n$ é obtido de $\mathbb{C}P^{n-1}$ colando uma $2n$ -célula. (Veja a definição no exercício 17)
- (f) Conclua que $\mathbb{C}P^n$ é simplesmente conexo para todo n . (Faça esse exercício depois da aula sobre o Teorema de Seifert - van Kampen)

2 Equivalência de Homotopia

- 8. (a) Mostre que todo espaço contrátil é conexo por caminhos.
- (b) Mostre que todo espaço convexo é contrátil.
- (c) Dê um exemplo de um espaço X que é contrátil, mas não é convexo.
- (d) Mostre que X é contrátil se e somente se Id_X é homotópica à uma aplicação constante.
- 9. (a) Mostre que Y é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico X).
- (b) Mostre que X é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico conexo por caminhos Y). O que se pode dizer quando Y não é conexo por caminhos?
- 10. Seja X um espaço topológico e seja $Cil(X) = X \times I$ o cilindro sobre X . Mostre que $Cil(X)$ é homotopicamente equivalente à X .
- 11. Seja $Con(X) = Cil(X) / \sim$ onde $(x, t) \sim (y, s)$ se e somente se $(x, t) = (y, s)$ ou $t = s = 1$. Mostre que $Con(X)$ é contrátil.
- 12. Mostre que a letra "A" é homotopicamente equivalente à letra "O".
- 13. Mostre que o Torus com quatro discos preenchidos (figura 5) é homotopicamente equivalente à um colar de quatro pérolas (veja a figura 6)

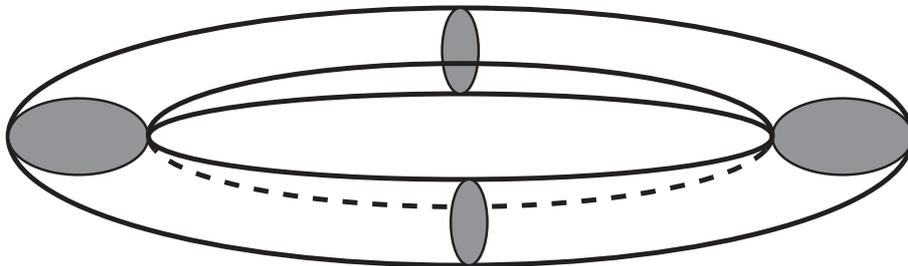


Figura 5: Torus com quatro discos preenchidos.

O colar de n pérolas (figura 6). Aqui X é o espaço obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}_1^2, \dots, \mathbb{S}_n^2$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}_i^2$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}_{i+1}^2$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}_n^2$ com $q_1 \in \mathbb{S}_1^2$.

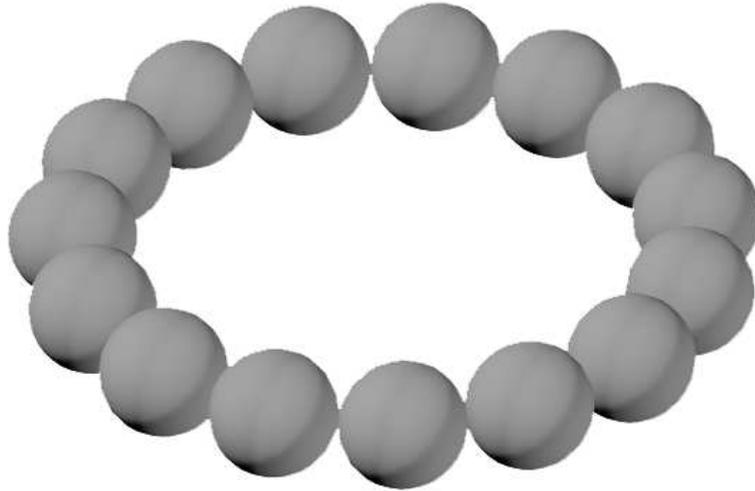


Figura 6: Colar de Pérolas.

14. Seja $C = \mathbb{S}^1 \times I$.
 - (a) Mostre que se $p = (x, t)$ com $t \neq 0$ e $t \neq 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.
 - (b) Mostre que se $p = (x, t)$ com $t = 0$ ou $t = 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à \mathbb{S}^1 .
15. Mostre que o espaço obtido removendo 2 pontos de \mathbb{R}^n é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1}$.
16. (a) Sejam p e q dois pontos distintos da esfera \mathbb{S}^n . Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p, q\}$ é homotopicamente equivalente à \mathbb{S}^{n-1} .
 - (b) Sejam p_1, \dots, p_k pontos distintos da esfera \mathbb{S}^n . Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p_1, \dots, p_k\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n-1}$ ($k - 1$ vezes).
17. Suponha que X é obtido de A colando uma n -célula. Mostre que se $x \in X - A$, então $i : A \rightarrow X - \{x\}$ é uma equivalência de homotopia. (Escreva a prova de forma cuidadosa e detalhada!)

OBS: X é obtido de A colando uma n -célula se existe uma aplicação contínua

$$\varphi : \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X$$

(chamada a função de colagem) tal que X é homeomorfo a $A \sqcup D^n / \sim$ onde $\varphi(p) \in A \sim p \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n$.

18. Seja X um espaço topológico, e $A \subset X$ um subespaço. Mostre que existe uma retração $r : X \rightarrow A$ se e somente se para todo espaço Y e toda aplicação contínua $f : A \rightarrow Y$ existe uma extensão contínua $\tilde{f} : X \rightarrow Y$.

19. Mostre que $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ é homotopicamente à \mathbb{S}^{n-k-1} .

20. Seja X um espaço conexo por arcos e $x \in X$. Mostre que o espaço

$$P(X, x) = \{\alpha : I \rightarrow X : \alpha(0) = x\}$$

é contrátil.

21. Considere os seguintes grupos clássicos:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle\}$$

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

$$U(n) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \langle\langle Au, Av \rangle\rangle = \langle\langle u, v \rangle\rangle\}$$

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\},$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ denota o produto escalar usual de \mathbb{R}^n , e $\langle\langle \ , \ \rangle\rangle$ denota o produto escalar hermiteano usual de \mathbb{C}^n .

Mostre que:

- $O(n, \mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL(n, \mathbb{R})$. DICA: pense no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.
- $SO(n, \mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL^+(n, \mathbb{R})$.
- $SO(n, \mathbb{R})$ é compacto, mas $GL^+(n, \mathbb{R})$ não é compacto.
- $SU(2)$ é homeomorfo à \mathbb{S}^3 e portanto é simplesmente conexo.
- \mathbb{S}^3 admite 3 campos de vetores X_1, X_2, X_3 que são linearmente independentes em todos os pontos.
- Existe um recobrimento de $SU(2)$ em $SO(3)$. Calcule o grupo fundamental de $SO(3)$.
- Mostre que $SO(3)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}P^3$

(h) $U(n)$ é conexo por caminhos, mas $O(n, \mathbb{R})$ não é conexo.

22. Seja $n \geq 2$, e $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção nas primeiras duas coordenadas (i.e., $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e $\pi(u, v) = u$). Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função suficientemente pequena, então existe $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\pi(x) + f(x) = 0$ (em outras palavras, mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\|f(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(x) + f(x) = 0$).

Dica: Assuma que $\pi(x) + f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Escreva $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e para cada $v \in \mathbb{R}^{n-2}$ considere a aplicação

$$g_v : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad g_v(u) = \frac{u + f(u, v)}{\|u + f(u, v)\|}.$$

Mostre que g_v é ao mesmo tempo homotópico à identidade e à uma aplicação constante. Utilize o exercício anterior.