Aula 21

Complexos CW (parte II)

Lembre que: (Todos espaços Hausdorff!!)

- n-célula em X: (e, h_e) t.q. $h_e : D^n \to X$ contínua &
  $\mathring{h}_e : \mathring{D}^n \to e = h_e(\mathring{D}^n)$ é homeomorfismo

- X é obtido de A colando uma n-célula: $X = A \cup e, \quad A \cap e = \phi$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\chi_e"'] & D^n \arrow[d, "h_e"] \\ A \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$ é um pushout $\Rightarrow X = A \cup_{\chi} D^n =$

$= A \sqcup D^n / \sim$

$p \in S^{n-1} \sim \chi(p) \in A$

I) Colando Muitas Células:

- X Hausdorff, $A \subset X$ fechado

Def: X é obtido de A colando n-células se existe n-células $e_\lambda \subset X$, $\lambda \in \Lambda$ tal que $X = A \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda)$ &

(1) $A \cap e_\lambda = \phi$, $\underbrace{\partial_{cell}(e_\lambda)}_{\bar{e}_\lambda - e_\lambda} \subset A$, $e_\lambda \cap e_\gamma = \phi \quad \forall \lambda, \gamma \in \Lambda$

(2) $F \subset X$ é fechado $\Longleftrightarrow \begin{cases} F \cap A \text{ é fechado} \\ F \cap e_\lambda \text{ é fechado } \forall \lambda \in \Lambda \end{cases}$

OBS: A condição (2) é automática se Λ é finito.

- Note que no caso em que Λ é infinito, a condição (2) é exatamente o que precisamos para demonstrar a propriedade universal (continuidade de f)

<u>Prop</u>: (Prop. Universal) Se X é Hausdorff & $A \subset X$ fechado. Suponha que X é obtido de A colando n-células $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e seja $\chi_\lambda : S^{n-1}_\lambda \longrightarrow A$ as aplicações características. Então X é um pushout, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\lambda\in\Lambda} S^{n-1}_\lambda \arrow[r, hook] \arrow[d, "\coprod \chi_\lambda"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} D^n_\lambda \arrow[d, "\coprod h_\lambda"] \arrow[ddr, bend left, "\coprod f_\lambda"] & \\
A \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f_A"'] & X \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: Identica à demonstração da prop. univesal para colagem de uma n-célula.

<u>OBS</u>: Segue que podemos recuperar X a partir de $\{\chi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ & A:

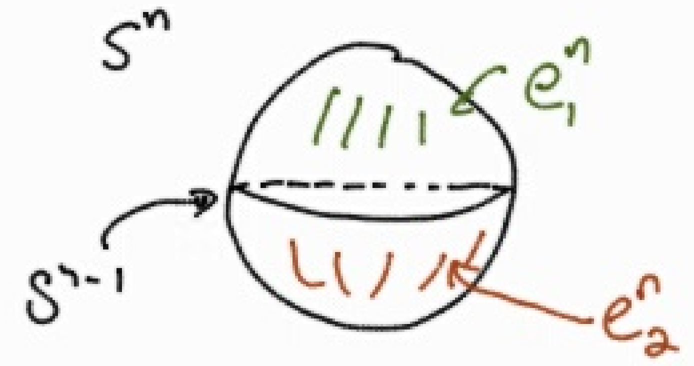
$$\boxed{\begin{array}{l} X = A \coprod \left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} D^n_\lambda \right) / \sim \\ \text{onde} \\ \quad p \in \partial D^n_\lambda \sim \chi_\lambda(p) \in A \end{array}}$$

<u>Exercício</u>: Mostre que (1) $e_\lambda \subset X$ é aberto

(2) $e_\lambda \cap \overline{e}_\gamma = \phi \quad \forall \lambda \neq \gamma \in \Lambda$

Exemplo:

S^n é obtido de S^{n-1} colando duas n-células



II) Complexos CW

Def: Uma decomposição celular de X é uma sequencia de subespaços fechados

$$\phi = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$$

tal que

(1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$

(2) X_n é obtido de X_{n-1} colando n-células

(3) $F \subset X$ é fechado $\Longleftrightarrow$ $F \cap X_n$ é fechado $\forall n$

OBS: • Em (2), as aplicações definidoras (ou características) são parte da definição

• (3) só é importante se $X_{n+1} \neq X_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

• O mesmo espaço admite muitas decomposições celulares

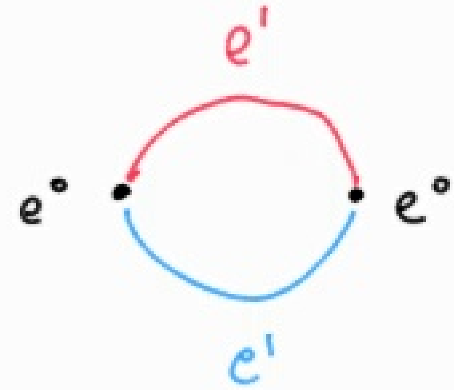
Def: • Um complexo CW é um espaço X junto com uma decomposição celular

• X_n é o n-esqueleto de X

Exemplos:

1) $X = S^1$

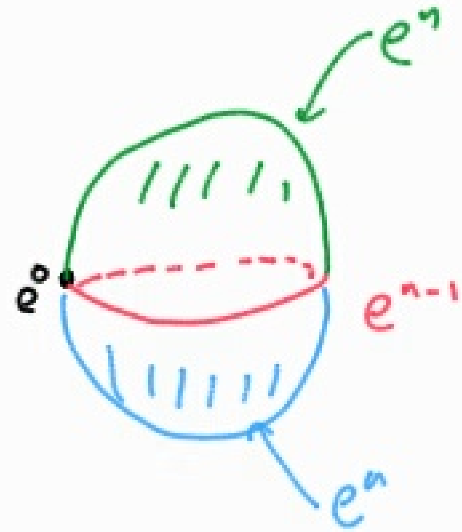
$S^1 = e^0 \cup e^1$



$$S^1 = \underbrace{\underbrace{e^0}_{X_0} \cup e^0 \cup e^1 \cup e^1}_{X_1}$$

2) $X = S^n$

$S^n = e^0 \cup e^n$

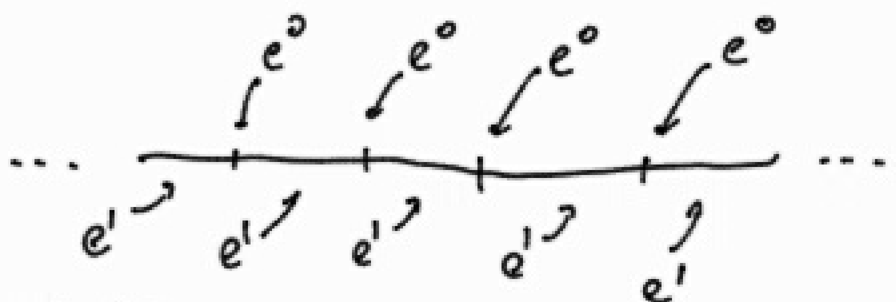


$$S^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{e^0}_{X_0} \cup e^{n-1}}_{X_{n-1}} \cup e^n \cup e^n}_{X_n}$$

3) $X = \mathbb{R}$

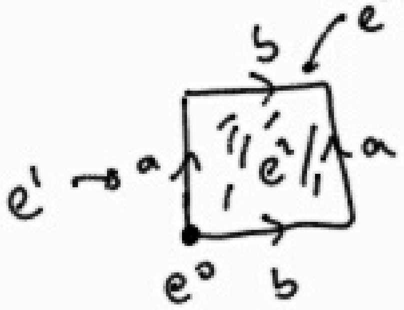
$e^0_i = \{ i \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{R}$

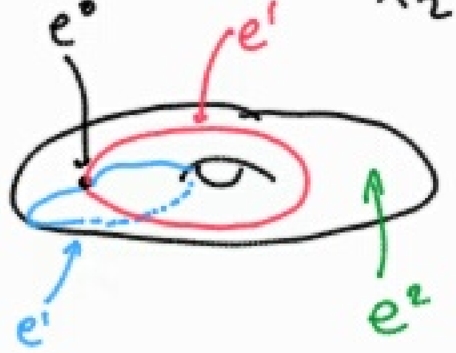
$e^1_i = (i, i+1)$



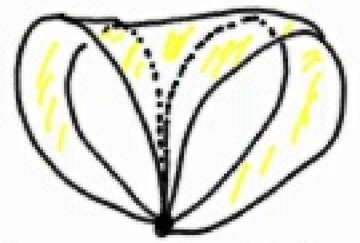
$h_i : \underbrace{[-1,1]}_{D^1} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad h_i(t) = \dfrac{t + 2i + 1}{2}$

4) $X = T^2$



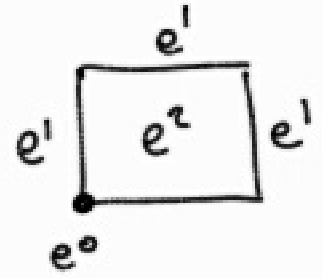


5) X = paraquedas $= I\times I/\sim \qquad (0,0)\sim(0,1)\sim(1,0)\sim(1,1)$



(Tentativa de desenho ü)

$X = e^0 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^1 \cup e^2$



$X_0 = \bullet$

$X_1 =$ 

6) $X = \mathbb{R}P^n$

Já vimos que $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n-célula

Decomposição:

$$\underset{\substack{\parallel \\ pt}}{\mathbb{R}P^0} \subset \underset{\substack{\parallel \\ S^1}}{\mathbb{R}P^1} \subset \mathbb{R}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$$

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n \qquad \underbrace{\chi_{e^k} : S^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1}}_{\text{Recobrimento duplo}}$$

<u>Exercício</u>: Seja X um complexo CW.

- Mostre que $K \subset X$ é compacto $\Longrightarrow$ K intersecta um número finito de células
- Mostre que X é compacto $\Longleftrightarrow$ o número total de células é finito

<u>Def</u>: Seja X complexo CW compacto.
O <u>número de Euler de X</u> é

$$\#\,0\text{-células} - \#\,1\text{-células} + \cdots + (-1)^n \#\,n\text{-células}$$

<u>Exercício</u>: Seja K complexo simplicial. Mostre que $|K|$ é complexo-CW e se $|K|$ é compacto $\Rightarrow \chi_{simp}(K) = \chi_{cell}(|K|)$.