Aula 19

(1)

Grau de Brouwer

- Lembre que $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \equiv H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$
- Seja $[S^n]$ o gerador de $H_n(S^n)$ correspondente à 1 no isomorfismo acima (Determinado pela escolha de orientação em S^n)
- Se $f: S^n \to S^n \Rightarrow f_*: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ é homomorfismo.

Logo, f_* é determinado por $f_* \underbrace{[S^n]}_{1} = \underbrace{a [S^n]}_{a}$

Def: O grau de f é $\deg f \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$\left(f_*[S^n] =\right) f_*(1) = \deg f \left(= \deg f \cdot [S^n]\right)$$

(OBS: Não depende da escolha de orientação)

OBS: Se M, N são n-variedades fechadas orientadas com classe fundamental $[M]$ & $[N]$, e $f: M \to N$ é contínua

$$\Rightarrow \deg f \text{ é definido por } \underbrace{f_*[M] = (\deg f)[N]}_{\text{depende da escolha de orientação.}}$$

Propriedades de deg: (para $f: S^n \to S^n$)

1) $\deg(Id_{S^n}) = 1$ (pois $Id_* = Id$)

2) Se f não é sobrejetora $\Rightarrow \deg(f) = 0$

Pois: se $y \in S^n$, $y \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow \underbrace{S^n \xrightarrow{\bar{f}} S^n - \{y\} \overset{i}{\hookrightarrow} S^n}_{f}$

mas $S^n - \{y\} \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow H_n(S^n - y) = 0 \Rightarrow \bar{f}_* \equiv 0$ &

$f_* = i_* \circ \bar{f}_* \Rightarrow f_* \equiv 0$

3) Se $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$

pois $f_* = g_*$

4) $\deg(f \circ g) = (\deg f)\cdot(\deg g)$ pois $(f\circ g)_* = f_* \circ g_*$

$\Rightarrow (f\circ g)_*[S^n] = f_* \circ g_*[S^n] = f_*(\deg g\,[S^n]) =$

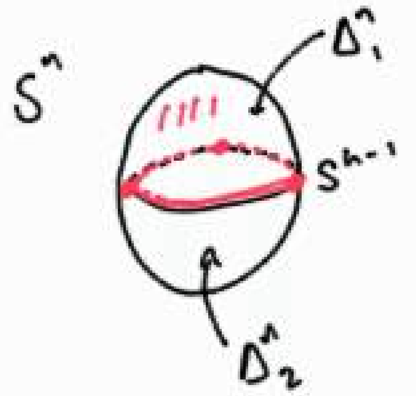
$= (\deg g)\, f_*[S^n] = (\deg g)\cdot(\deg f)\,[S^n].$

5) se f é equivalência de homotopia $\Rightarrow \deg(f) = \pm 1$

pois $f \circ g \simeq Id \Rightarrow (\deg f)\cdot(\deg g) = 1 \Rightarrow \deg f = \pm 1$

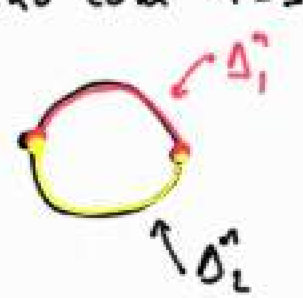
6) Se f é uma reflexão que fixa $S^{n-1} \subset S^n$ então $\deg f = -1$

Pois: Considere a estrutura de Δ-complexo em S^n com exatamente dois n-simplexos colados ao longo de $S^{n-1} \subset S^n$



(desenho com $n=2$)

desenho com $n=1$



Em geral: S^n é obtido colando dois discos $\cong \Delta^n$ (os hemisférios) ao longo do equador

Então $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ gera $H_n(S^n)$, e $f_*(\Delta_1^n - \Delta_2^n) = \Delta_2^n - \Delta_1^n = -(\Delta_1^n - \Delta_2^n)$.

Alternativamente:

$S^n = \Sigma S^{n-1} = Con_v(S^{n-1}) \cup Con_{-v}(S^{n-1})$

$\Rightarrow$ n-simplexo de S^n orientados coerentemente são

$\{ \underbrace{[v,\sigma_i], -[-v,\sigma_i]} \mid \sigma_i$ é $(n-1)$-simplexo de S^{n-1} orientados coerentemente $\}$

o sinal é para induzir orientação oposta em σ_i

$\Rightarrow [S^n] = \sum_i [v,\sigma_i] - [-v,\sigma_i] \Rightarrow f_*[S^n] = \sum_i f_*[v,\sigma_i] - f_*[-v,\sigma_i] = \underbrace{\sum_i [-v,\sigma_i] - [v,\sigma_i]}_{= -[S^n]} =$

7) Se $A: S^n \longrightarrow S^n$, $A(x) = -x \Rightarrow \deg A = (-1)^{n+1}$

pois: Seja $r_i : S^n \longrightarrow S^n$,

$r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ } reflexão que fixa $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i = 0\}$

$\Rightarrow A = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1} \Rightarrow \deg A = \deg r_1 \cdot \dots \cdot \deg r_{n+1} = (-1)^{n+1}$

Consequencias:

Note que:

Prop: $A \simeq Id_{S^n} \Leftrightarrow n$ é ímpar

Dem: $(\Rightarrow)$ Se $A \simeq Id_{S^n} \Rightarrow \deg A = \deg Id \Rightarrow (-1)^{n+1} = 1 \Rightarrow n$ é ímpar

$(\Leftarrow)$ Seja $n = 2k-1$ e considere $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}^k$

Seja $H: S^{2k-1} \times I \longrightarrow S^{2k-1}$

$$H(z_1, \dots, z_k, t) = (e^{i\pi t} z_1, \dots, e^{i\pi t} z_k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(z_1, \dots, z_k, 0) = (z_1, \dots, z_k) \\ H(z_1, \dots, z_k, 1) = (-z_1, \dots, -z_k) \end{cases}$$

$\square$

Prop: Se f não tem ponto fixo $\Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}$

Dem: Se $f(x) \neq x \Rightarrow$ o segmento de reta passando por $-x$ & $f(x)$ não passa pela origem, ou seja

$$(1-t)f(x) - tx \neq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Seja $H(x,t) = \dfrac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|} \Rightarrow \begin{array}{l} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = -x = A(x) \end{array}$

$\Rightarrow f \simeq A \Rightarrow \deg f = (-1)^{n+1}.$

$\square$

Teorema (da bola cabeluda) / Exercício!

$\exists\, \xi \in \mathfrak{X}(S^n)$, $\xi(x) \neq 0 \ \forall x \iff n$ é ímpar

Dica: Mostre que se $\exists\, \xi$ então

$$H(x,t) = \cos(t\pi)x + \sin(t\pi) \times \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$$

é homotopia entre A & Id_{S^n}.

Teorema: Se $G \neq \{1\}$ age livremente em $S^{2k} \Rightarrow G = \mathbb{Z}_2$

Dem: Suponha que $G \circlearrowright S^{2k}$ livremente. Seja

$$\Psi : G \longrightarrow \text{Homeo}(S^{2k}) \quad \text{a ação}$$

ou seja
$$\Psi_g : S^{2k} \longrightarrow S^{2k}$$
$$x \longmapsto gx$$

Como Ψ_g é homeo $\Rightarrow \deg \Psi_g = \pm 1$

Note que

$$\deg : G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \quad \text{é homomorfismo}$$
$$g \longmapsto \deg \Psi_g$$

pois $\deg(gh) = \deg \Psi_{gh} = \deg(\Psi_g \circ \Psi_h) = \deg \Psi_g \cdot \deg \Psi_h = \deg(g)\deg(h)$

Além disso, se $g \neq 1 \Rightarrow \Psi_g$ não tem ponto fixo (Ação Livre)

$\Rightarrow \deg(g) = (-1)^{2k+1} = -1$

Logo
- •) deg é sobrejetor
- •) $\ker \deg = \{1\}$

$\Rightarrow$ deg é isomorfismo

$\square$

<u>Pergunta</u>: Como calcular $\deg f$?

<u>Ideia</u>: Em "casos bons", $\deg f$ pode ser calculado como uma soma de graus locais.

- Suponha que existe $y \in S^n$ tal que $f^{-1}(y) = \underbrace{\{x_1, \dots, x_m\}}_{\text{finito}} \subset S^n$

(por exemplo, se f é suave (ou C^1) tome y um valor regular, i.e., t.q. $d_x f : T_x S^n \to T_y S^n$ é sobrejetor $\forall x \in f^{-1}(y)$ $\rightsquigarrow$ Existe pelo teorema de Sard)

- Sejam $U_i \subset S^n$ vizinhaças abertas de x_i tais que
  - $\to$ $U_i \cap U_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
  - $\to$ $f(U_i) = V \subset S^n$ viz. aberta de y, $\forall i$

- Note que:

1) $H_n(U_i, U_i - x_i) \simeq H_n(S^n, S^n - x_i)$ por excisão com $A = S^n - x_i$, $B = U_i$

isomorfismo natural

2) $H_n(S^n, S^n - x_i) \simeq H_n(S^n)$ pela sequencia longa do par

Logo, fixando o isomorfismo $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ (i.e., fixando orientasão em S^n) obtemos isomorfismos

$$H_n(U_i, U_i - x) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_n(V, V - y) \quad \forall i$$

- Temos $f : (U_i, U_i - x_i) \longrightarrow (V, V - y)$ aplicasão de pares

<u>Def</u>: <u>O grau local de f em x_i</u>, denotado por $\deg f|_{x_i}$, é

$$f_* : H_n(U_i, U_i - x_i) \longrightarrow H_n(V, V - y)$$
$$1 \longmapsto \deg f|_{x_i}$$

Proposição: Se existe $y \in S^n$ tal que $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\} \subset S^n$ ⑥
então
$$\boxed{\deg f = \sum_{i=1}^{m} \deg f|_{x_i}}$$

Dem: Note que

- $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) = H_n(S^n, S^n - \{x_1, \dots, x_m\}) \underset{\text{excisão}}{\cong} H_n\left(\coprod_i U_i, \coprod_i U_i - x_i\right) \cong$
$$\cong \bigoplus_{i=1}^{m} H_n(U_i, U_i - x_i) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^m$$

- Se $K_i : (U_i, U_i - x_i) \longrightarrow (S^n, S^n - f^{-1}(y))$ é a inclusão,

$$\Rightarrow K_{i*} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^m$$
$$1 \longmapsto (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots 0)$$

Queremos relacionar:

$$H_n(S^n) \xrightarrow[(\deg f)\cdot]{f_*} H_n(S^n) \qquad \text{com} \qquad H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow[(\deg f|_{x_i})\cdot]{f_*} H_n(V, V - y)$$

Por um lado, temos que

$$\begin{array}{ccc} H_n(U_i, U_i - x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - y) \\ K_i \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \cong \text{(Excisão)} \\ H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) & \xrightarrow[f_*]{} & H_n(S^n, S^n - y) \end{array}$$

(Identificação Canônica!)

Usando a identificação canônica $H_n(V, V - y) \cong H_n(S^n, S^n - y)$

$$\Rightarrow \boxed{f_* \circ K_i(1) = \deg f|_{x_i}} \quad (1)$$

Por outro lado temos

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \arrow[r, "f_*"] & H_n(S^n, S^n - y) \\
H_n(S^n) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(S^n) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}
\quad \begin{pmatrix}\text{Seq. longa do} \\ \text{par}\end{pmatrix}
\qquad \begin{pmatrix}\text{Identificação} \\ \text{Canônica}\end{pmatrix}$$

Usando a identificação canônica $H_n(S^n, S^n - y) \cong H_n(S^n)$ temos

$$\boxed{f_* \circ j(1) = \deg f} \quad (2)$$

Logo, precisamos comparar $j(1)$ com $k_i(1)$. Temos

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(U_i, U_i - x_i) \arrow[dl, "\cong"', "\text{excisão}"] \arrow[d, "k_i", "\circlearrowright\ (3)"'] \\
H_n(S^n, S^n - x_i) & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \arrow[l, "p_i"'] \\
 & H_n(S^n) \arrow[ul, "\cong", "\text{Seq. longa do par}"'] \arrow[u, "j"', "\circlearrowleft\ (4)"]
\end{tikzcd}$$

onde p_i é a projeção $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \cong \mathbb{Z}^m$ no i-ésimo fator $H_n(S^n, S^n - x_i) \cong \mathbb{Z}$ induzido pela inclusão $(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \hookrightarrow (S^n, S^n - x_i)$

$(3) \Rightarrow \quad p_i \circ k_i(1) = 1 \quad \forall i$

$(4) \Rightarrow \quad p_i \circ j(1) = 1 \quad \forall i \Rightarrow j(1) = (1, 1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^{m} k_i(1)$

Juntando tudo, obtemos que

$$\deg(f) = f_* j(1) = f_* \sum_i k_i(1) = \sum_{i=1}^{m} f_* k_i(1) = \sum_{i=1}^{m} \deg f\big|_{x_i} \qquad \square$$

<u>Pergunta</u>: Como calcular $\deg f|_{x_i}$?

- Se $f: S^n \longrightarrow S^n$ é suave (ou pelo menos C^1) & $y \in S^n$ é valor regular

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\} \quad \text{e} \quad \deg f\big|_{x_i} = \begin{cases} +1 & \text{se } d_{x_i}f \text{ preserva orientasão} \\ -1 & \text{se } d_{x_i}f \text{ inverte orientasão} \end{cases}$$

<u>OBS</u>: A demonstrasão desta afirmasão é parte do conteúdo do projeto 2 (valendo +0,5 ptos na média)

<u>Consequência/Exemplo</u>:

Seja $f_m: S^1 \longrightarrow S^1$

$$f_m(z) = z^m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\deg f_m = m}$$

<u>Dem</u>:

- Se $m = 0 \Rightarrow f_0 \equiv 1$ consante $\Rightarrow \deg f_0 = 0$

- Se $m < 0 \Rightarrow f_m = f_{-1} \circ f_{|m|}$ onde $f_{-1}(z) = z^{-1}$

Note que

$$f_{-1}(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x - iy$$

ou seja

$$f_{-1}(x,y) = (x,-y) \text{ é uma reflexão}$$

$$\Rightarrow \deg f_m = -\deg f_{|m|} \Rightarrow \text{basta calcular quando } m > 0$$

- $m > 0$ $\quad f_m^{-1}(1) = \{z_1, \dots, z_m\}$ raízes da unidade

& $d_{z_k} f$ preserva orientasão (f é uma rotasão) $\Rightarrow \deg f_m = m$ $\square$