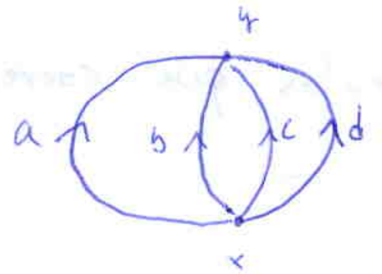
Aula 9 (Homologia Intuitiva)

Tirado do Hatcher

Considere

$X_1 =$



(desenho 1-dimensional)

Exercício: Calcole $\pi_1(X_1, x)$

Alguns laços em X_1:

$ab^{-1}, ac^{-1}, ad^{-1}, bd^{-1}, ac^{-1}bd^{-1}ca^{-1}, \dots$

Primeira Ideia: (Abelianizar)

$\pi_1(X, x)$ em geral não é abeliano (e.g. nesse caso)

$\Rightarrow$ Trocar por um grupo abelian (simplifica!)

• Em notação abeliana os laços acima ficam

$a-b,\ a-c,\ a-d,\ b-d,\ \underbrace{a-c+b-d+c-a}_{=\, b-d\ !!!},\ \dots$

Note que:

$a-b = -b+a$ (abeliano). Antes $ab^{-1} \in \Omega(X, x)$

$b^{-1}a \in \Omega(X, y)$

Segunda Ideia: Esquecer o ponto base!
(consequência de pensar de forma abeliana)

Objetivo: "Medir buracos" em X_1

$\Rightarrow$ Devemos olhar para **ciclos**: elementos que correspondem à laços

Defina: • 1-cadeias em X_1 = $C_1(X_1) = \{ka + lb + mc + nd \mid k,l,m,n \in \mathbb{Z}\}$

= grupo abeliano gerado por a, b, c, d

~~0-cadeias em X_1 = $C_0(X_1)$~~

• 1-ciclos em X_1 = {cadeias que "se fecham"}

= {1-cadeias que saem de x o mesmo número de vezes que entram}

• **Pergunta**: Como medir se $\sigma \in C_1(X_1)$ é um 1-ciclo?

Defina: 0-cadeias em X_1 = $C_0(X_1) = \{rx + sy \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$

Tome $\partial : C_1(X) \to C_2(X)$ homo. de grupos abelianos

$\partial(a) = \partial(b) = \partial(c) = \partial(d) = y - x$ (definida nos geradores)

chegada saída

Logo, $\sigma \in C_1(X_1)$ é um ciclo $\iff \partial\sigma = 0$

$\iff k+l+m+n=0$

Note que:

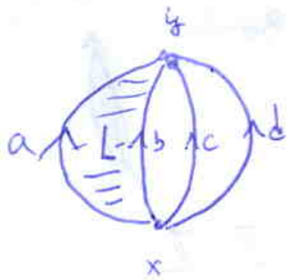
1- Ciclos em X_1 = $\ker \partial = \mathbb{Z}\langle a-b, b-c, c-d\rangle$

pois

$$\sigma \in \ker\partial \Rightarrow \sigma = ka + lb + mc - (k+l+m)d$$
$$= k(a-b) + k+l(b-c) + (k+l+m)(c-d)$$

Geométricamente: X_1 tem 3-buracos (corresponde à $a-b$, $b-c$, $c-d$)

Agora Considere

$X_2 =$ 

obtido de X_1 colando uma 2-célula através de $\chi = ab^{-1}$

OBS: Note que agora o laço ab^{-1} é trivial em $\pi_1(X_2, x)$

Considere:

- 2-cadeias em $X_2 = C_2(X_2) = \mathbb{Z}\cdot\langle L\rangle$

- $\partial : C_2(X_2) \longrightarrow C_1(X_1)$

$$\partial L = a - b$$

Temos

$$C_2(X_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X_2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X_2) \to 0$$

Note que $\quad \partial_1 \circ \partial_2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \partial_2 \subset \ker \partial_1$

Consider:

$$H_1(X_2) = H_1(X_2, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_2} = \frac{\text{ciclos}}{\text{Bordos}} \text{ "="} \frac{\text{"laços"}}{\text{"homotopias"}}$$

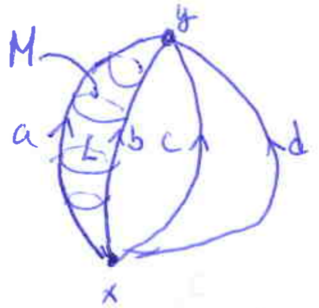
$$= \mathbb{Z}\langle b-c, c-d\rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Geometricamente: 2 buracos de dimensão 2

(com bordo de dimensão 1)

Consider agora

$$X_2' = X_2 \cup_{\chi'} D^2, \quad \chi' = ab^{-1}$$

$X_2' =$ 

$$C_2(X_2') = \mathbb{Z}\langle L, M\rangle$$

$$\partial(L) = a - b = \partial(M)$$

$C_3(X_2') = 0$

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(X_2') \xrightarrow{\partial} C_1(X_2') \xrightarrow{\partial} C_0(X_2') \to 0$$

Note que agora,

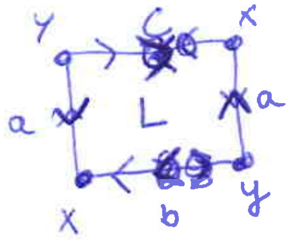
$L - M$ é um ciclo: $\partial(L-M) = 0$

$$\Rightarrow H_2(X_2', \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{Im} \partial_3} = \ker \partial_2 = \mathbb{Z}\langle L - M\rangle \cong \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow X_2'$ tem 1 buraco de dimensão 3 $\left(\begin{array}{c}\text{bordo de}\\ \text{dimensão 2}\end{array}\right)$

Mais Exemplos de forma intuitiva:

1) Faixa de Möbius



$= X$

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$C_2(X) = \langle L \rangle, \quad C_1(X) = \langle a, b, c \rangle, \quad C_0(X) = \langle x, y \rangle$$

onde • $\partial_2(L) = a - b + a - c = 2a - b - c$

$\Rightarrow \ker \partial_2 = \{0\} \Rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}) = \dfrac{\ker \partial_2}{\operatorname{Im} \partial_3} = \{0\}$

(Não tem buraco de dimensão 3)

• $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = x - y$

$\ker \partial_1 = \langle a-b,\ a-c,\ b-c \rangle$ é gerado por $a-b$, $a-c$

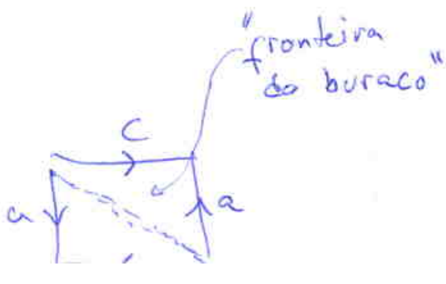
$b - c = (a-c) - (a-b)$

$$\Rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\langle a-b, a-c \rangle}{\langle 2a-b-c \rangle} \cong \mathbb{Z}\langle a-b \rangle$$

Pois: $(a-b) + (a-c) = 2a - b - c = 0$

$\Rightarrow$ No quociente, $(a-b) = -(a-c)$

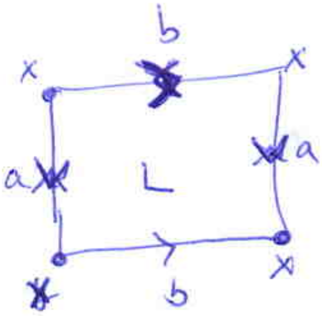
"Tem um buraco de dimensão 1"



$$H_0(X) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{Im} \partial_1} = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x - y\rangle} \cong \mathbb{Z}$$

Exemplo:

$X = T^2 =$



$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\partial_3"] & C_2(T^2) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, equal] & C_1(T^2) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & C_0(T^2) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, equal] & 0 \\ & \langle L\rangle & \langle a, b\rangle & \langle x\rangle & \end{tikzcd}$$

$\partial_2(L) = a + b - a - b = 0$

$\partial_1(a) = \partial_1(b) = x - x = 0$

$\partial_0(x) = 0$

$\Rightarrow$ $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$ — 1 - buraco de demensão 3

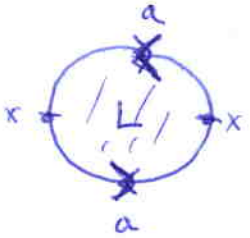
$H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ — 2 - buracos de dimensão 2

$\underbrace{H_0(T^2) = \mathbb{Z}}$ — conexo por caminhos

isto é um "defeito" que vamos concertar pois T^2 tem 0-buracos de dimensão 1, i.e. é conexo por caminhos

Exemplo:

$X = \mathbb{P}^2 =$



$$0 \xrightarrow{\partial} \langle L \rangle \xrightarrow{\partial} \langle a \rangle \xrightarrow{\partial} \langle x \rangle \xrightarrow{\partial} 0$$

$\partial_2(L) = 2a \Rightarrow \ker \partial_2 = \{0\}$

$\partial_1(a) = x - x = 0$

$\partial_0(x) = 0$

$\Rightarrow \quad H_2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) = 0$

$H_1(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) = \dfrac{\langle a \rangle}{\langle 2a \rangle} = \mathbb{Z}_2$ ⟵ "tem um buraco de dimensão 2 mas dando duas voltas no bordo a fechamos o buraco"

$H_0(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) = 0$